МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра физики

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине

"Физика"

семестр IV (оптика, основы квантовой теории, атомной физики

и физики конденсированных сред)

Конспект лекций подготовлен к.т.н. доц. О.И.Бурцевой, к.т.н. ст. преп. О.А.Герасимовой, к.т.н. доц. О.Ю.Горбуновой, к.т.н. доц. Е.Е.Диковой, к.т.н. доц. К.В.Жигуновым, ст. преп. С.Е.Кажарской, к.т.н. доц. И.Ю.Канунниковой, к.ф.-м.н. доц. Ю.Н.Колмаковым (ред), к.ф.-м.н. доц. А.М.Кузнецовым, д.т.н. проф. Р.Н.Ростовцевым, к.т.н., доц. О.В.Шуваевой, к.т.н. доц. Е.В.Якуновой

1. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

1.1. Уравнение плоской и сферической волны. Волновое число и волновой вектор

В любой конденсированной среде соседние частицы среды взаимодействуют друг с другом, и если одна частица начнет колебаться, то эти колебания передаются остальным частицам с некоторой скоростью v. Процесс распространения таких колебаний в пространстве называется волной.

Волны бывают продольные и поперечные. В <u>продольных волнах</u> частицы среды колеблются (смещаются) вдоль направления распространения волны, т.е. вдоль вектора скорости волны \vec{v} .

Пример: колебания плотности среды, звук.

В <u>поперечных волнах</u> смещение \vec{u} частиц среды перпендикулярно к направлению распространения волны, как показано на правом рисунке.

Продольные волны возникают, если на частицы среды действуют силы потенциального поля, а поперечные волны - при действии сил вихревого поля.





Пример: плазма - это совокупность свободных нейтральных и заряженных частиц с зарядами обоих знаков, обладающая свойством квазинейтральности. Например - это электронно-ионная плазма в тлеющем разряде. Сгущения и разряжения плотности электронов в ней (намного более тяжелые ионы, как правило, не успевают заметно сместиться) управляются потенциальными силами электростатического кулоновского взаимодействия. Следовательно, волна колебаний электронной плотности будет продольной. Но при этом колебательное движение электронов создает переменный ток и вихревое электрическое поле. В плазме возникнут также поперечные волны, где электроны будут колебаться перпендикулярно к направлению распространения электромагнитного поля.

Геометрическое место точек, до которых в данный момент времени дошли колебания (волна), называется <u>волно-</u> <u>вым фронтом</u> (это поверхность, по одну сторону которой частицы среды колеблются, а по другую – еще нет.

<u>Волновой поверхностью</u> называется геометрическое место точек, в которых частицы среды колеблются в одинаковой фазе или испытывают одинаковые смещения. Волновой фронт и волновые поверхности всегда перпендикулярны к направлению распространения волны \vec{v} .

Если волновой фронт и волновые поверхности являются плоскостями, то волна называется <u>плоской</u>, если сферами, то волна – <u>сферическая</u> (см. рисунок выше).

Пусть колебания распространяются вдоль оси *x* (плоская волна). Если частицы среды в плоскости *x* = 0 начали колебаться по гармоническому закону $\vec{u}(0,t) = \vec{u}_0 \cos(\omega t + \varphi)$, то эти колебания, распространяясь со скоростью \vec{v} , достигнут произвольной плоскости *x* = const только через время $\tau = x/v$. Следовательно, колебания частиц в плоскости *x* ≠ 0 будут запаздывать на

время т:
$$\vec{u}(x,t) = \vec{u}_0 \cos(\omega(t-\tau) + \phi) = \vec{u}_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x + \phi\right)$$

<u>Длина волны</u> λ – это расстояние между двумя соседними точками, колеблющимися в одинаковой фазе (испытывающими одинаковое смещение).

<u>Период колебаний</u> Т – это время, за которое волна со скоростью v проходит

путь, равный длине волны λ : $T = \frac{1}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{v}$. Величина $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ называется волновым числом.



Учитывая это, получаем выражение для <u>волновой функции</u> $\vec{u}(x,t)$ **плоской волны, распространяющейся**

вдоль оси х: $\vec{u}(x,t) = \vec{u}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$, где $(\omega t - kx + \varphi) - \underline{\phi}$ аза волны, зависящая как от времени, так и от координа-

ты. В точке с координатой x начальной фазой колебаний будет величина $(-kx + \phi)$.

Волновая функция $\vec{u}(x,t)$ описывает колебания всех частиц среды в произвольный момент времени. Часто ее

записывают в комплексном виде $\vec{u}(x,t) = \vec{u}_0 \exp(i(\omega t - kx + \varphi))$, используя комплексное представление величин \rightarrow

 $\exp(i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$ и $\exp(-i\alpha) = \cos \alpha - i \sin \alpha$. Чтобы перейти от комплексной записи волновой функции к действительному значению, достаточно взять действительную часть комплексного выражения. Как правило, в дальнейшем будем использовать действительные гармонические функции cos или sin для описания волн, но для ряда задач использовать экспоненциальные (хотя и комплексные) функции оказывается много удобнее, чем гармонические.

Для плоской волны, движущейся против оси x, имеем $\left| \vec{u}(x,t) = \vec{u}_0 \cos(\omega t + kx + \varphi) \right|$.

Если плоская волна движется в произвольном направлении, то вводят волновой вектор $\left| \vec{k} = k \frac{\vec{v}}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right|$, направленный вдоль скорости \vec{v} волны. Волновая функция такой плоской волны имеет вид $\overline{\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi\right)}$, где \vec{r} – радиус-вектор.



Сферическую продольную волну легко создать точечным источником (возбудителем) колебаний в однородной среде. Волновая функция сферической волны имеет вид $|\vec{u}(r,t) = \vec{u}_0 \cos(\omega t - kr + \phi)|$ Действительно, ее волновая поверхность с одинаковой фазой колебаний $\omega t - kr + \varphi = \text{const}$ в любой фиксированный мо-

мент времени t образует сферу с радиусом $r = (\omega t + \varphi - \text{const})/k$. Обратите внимание на различие выражений для волновых функций плоской и сферической волн!

Волны с одной фиксированной частотой ω и постоянной амплитудой \vec{u}_0 называются монохроматическими. Для монохроматической волны волновая функция является бесконечной косинусоидой (или синусоидой), распространяющейся в пространстве со скоростью v. Такие волны называют бегущими.

1.2. Волновое уравнение и его решение. Суперпозиция монохроматических волн

Любой процесс распространения волны в пространстве описывается одним и тем же дифференциальным уравне-

нием – <u>волновым уравнением</u> $\boxed{\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}}$. Используя дифференциальный оператор Лапласа $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, волновое уравнение можно записать в виде $\boxed{\Delta \vec{u} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}}.$

Решением волнового уравнения всегда будет волновая функция $\vec{u}(\vec{r},t)$. Нетрудно проверить (подстановкой), что волновая функция $\vec{u}(x,t) = \vec{u}_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$ распространяющейся вдоль оси x плоской волны будет решением одномерного волнового уравнения $\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$.

Волновая функция $\vec{u}(\vec{r},t)$ – это не обязательно смещение частиц среды в пространстве. Она может быть любой векторной величиной, например, вектором напряженности электрического поля. В этом случае распространяются колебания электрического поля и т.п.

Гармоническая монохроматическая волна – это только простейшее решение, например, одномерного волнового уравнения. Его общим решением будет любая функция, зависящая от переменной $(t \mp x/v)$: $\vec{u}(t - x/v) -$ это волна, распространяющаяся вдоль оси x; $\vec{u}(t + x/v)$ – это волна, распространяющаяся против оси x.

Проверить это можно прямой подстановкой: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial (t - x/v)^2} \left(\frac{\partial (t - x/v)}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left(-\frac{1}{v}\right)^2.$

Поэтому колебания частиц среды могут происходить не обязательно по гармоническому закону. Они могут описываться любой периодической функцией с периодом *T*: f(t) = f(t+T). Но любая периодическая функция может быть представлена в виде суммы бесконечного числа гармонических функций: $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$ с различными час-

тотами ω_n , амплитудами A_n и начальными фазами ϕ_n .

Такое разложение называется разложением в ряд Фурье. Следовательно, любую волну с произвольной формой колебаний можно представить как суммарное распространение гармонических монохроматических волн с различными частотами ω_n и со скоростью v: $\vec{u}(t-x/v) = \sum_n \vec{u}_{0n} \cos(\omega_n t - k_n x + \varphi_n)$, где $k_n = \omega_n/v = 2\pi/\lambda_n$.

Неизвестные амплитуды \vec{u}_{0n} и начальные фазы ϕ_n определяют из начальных и граничных условий задачи. Пример такого разложения для "пилообразной" функции развертки был приведен в разделе 20.5.

Вывод: все результаты, полученные для монохроматической гармонической волны, будут справедливыми и для волн произвольной формы (сумма решений уравнения также является его решением). Поэтому далее будут исследоваться монохроматические гармонические волны.

Коэффициент, который стоит при производной $\partial^2 \vec{u}/\partial t^2$ в волновом уравнении, обязательно будет обратным квадратом скорости v волны. Это скорость перемещения волнового фронта и волновых поверхностей, т.е. точек, имеющих одинаковую фазу колебаний.

1.3. Волновое уравнение для электромагнитного поля в идеальном диэлектрике (вакууме)

Рассмотрим электромагнитное поле в вакууме или в однородной диэлектрической среде, где нет свободных зарядов и токов проводимости: ρ = 0; \vec{j} = 0. В этом случае система уравнений Максвелла (см. раздел 21.2) в дифференциальной

форме принимает следующий вид: (1)
$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
; (2) $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$; (3) $\operatorname{div} \vec{D} = 0$; (4) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Подействуем на обе части уравнения (1) оператором гот и воспользуемся уравнением (2); тогда получим $\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\vec{E}\right) = \left[\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right]\right] = -\mu_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}\vec{H} = -\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$. Двойное векторное произведение в этом равенстве раскрываем по

правилу $\begin{bmatrix} \vec{a}, \begin{bmatrix} \vec{b}, \vec{c} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$, т.е. $\begin{bmatrix} \vec{\nabla}, \begin{bmatrix} \vec{\nabla}, \vec{E} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = -\Delta \vec{E}$.

В результате этих преобразований получим волновое уравнение $\Delta \vec{E} = \left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}\right) = \epsilon \mu \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$

Анал

$$\Delta \vec{H} = \left(\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2}\right) = \epsilon \mu \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Так как общий вид волнового уравнения $\Delta \vec{u} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$, где v – скорость распространения волны, то получаем

Вывод: в **непроводящей** среде (вакуум, диэлектрик) электромагнитное поле существует в виде электромагнитных волн – это колебания вихревых электрического и магнитного полей, распространяющиеся со скоростью $v_{3M} = \frac{c}{\sqrt{c}}$,

где $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/c}$ - скорость света в вакууме.

1.4. Электромагнитные волны. Волновой вектор. Скорость электромагнитных волн. Связь напряженности электрического и магнитного поля в электромагнитной волне

Частным решением волнового уравнения будет <u>плоская</u> электромагнитная волна, в которой векторы напряженности электрического и магнитного поля изменяются в одной фазе с одной частотой ω (такая монохроматическая волна имеет определенную длину волны $\lambda = 2\pi v_{3M}/\omega$):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi\right); \ \vec{H} = \vec{H}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi\right).$$

У такой плоской волны волновые поверхности, т.е. точки, колеблющиеся в одной фазе,

будут плоскостями. Её волновой вектор $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\vec{v}_{_{3M}}}{v_{_{3M}}}$ направлен вдоль скорости $\vec{v}_{_{3M}}$ волны. Он показывает направление распространения плоской волны в пространстве (см. рисунок). Такая волна также называется бегущей.

Если плоская монохроматическая электромагнитная волна распространяется вдоль оси x, то поля в ней изменяются по закону $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi); \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$ где $k = 2\pi/\lambda = \omega/v_{_{3M}}$ - волно-

вое число. Электромагнитная волна, распространяющаяся **против оси** *x* имеет вид $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t + kx + \varphi); \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t + kx + \varphi).$

Сферическая волна, испускаемая точечным источником, находящимся в точке 0, и имеющая волновые поверхности в виде концентрических сфер с центрами в точке 0 (см. рисунок), имеет вид $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kr + \phi); \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kr + \phi).$







Электромагнитную волну с частотой ω создает, например, колебание электрических зарядов с той же частотой. Рассмотрим в плоскости *уг* бесконечную тонкую пластину, по которой против оси *у* протекает поверхностный переменный ток с линейной плотностью *i* = *i*_v = *i*₀ cos ($\omega t + \varphi$). Охватим участок пластины шириной *l* очень узким прямо-

угольным контуром. Запишем теорему о циркуляции для вектора \vec{H} : $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{3a}l + H_{nepeg}l = il$, где il – охватываемый контуром ток.

→ I

Но $H_{3a} = H_{перед} = H$ в силу симметрии, т.е. непосредственно вблизи пластины с

током возникают колебания магнитного поля $H = H_z (x = 0, t) = i/2 = (i_0 \cos(\omega t + \varphi))/2$.

Эти колебания распространяются вдоль оси x, запаздывая по времени: $H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$, где $k = 2\pi/\lambda = \omega/v_{_{3M}}$, $H_0 = i_0/2 -$ амплитуда колебаний напряженности магнитного поля. Это – **плоская волна**. Одновременно индуцируется вихревое электрическое поле

rot
$$\vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
 или $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ rot $\vec{H} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ det $\begin{vmatrix} \vec{i} & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x = 0 & H_y = 0 & H_z \end{vmatrix} = -\vec{j} \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\vec{j} \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} kH_0 \sin(\omega t - kx + \varphi).$

Следовательно, вектор \vec{E} напряженности электрического поля направлен вдоль оси у, и его проекция на эту ось определяется, как $E_y = -\int \frac{H_0 k}{\varepsilon_0 \varepsilon} \sin(\omega t - kx + \varphi) dt = \frac{H_0 k}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega} \cos(\omega t - kx + \varphi) = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$ (постоянная интегрирования равна нулю, так как постоянное электрическое поле отсутствует). Это – также **плоская волна**. Её амплитуда связана с амплитудой напряженности магнитного поля: $E_0 = \frac{H_0 k}{\varepsilon \varepsilon_0 \omega} = \frac{H_0}{\varepsilon \varepsilon_0 v_{_{3M}}} = H_0 \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon \varepsilon_0}}$.

Из полученных соотношений следует общий для всех бегущих электромагнитных волн результат:

Любая электромагнитная волна – это колебания электрического и магнитного полей, происходящие в одной фазе и с одной частотой, причем векторы напряженностей этих полей \vec{E} и \vec{H} образуют с вектором скорости волны $\vec{v}_{_{3M}}$ (или с волновым вектором \vec{k}) правую тройку векторов, как показано на рисунке. Амплитуды напряженностей электрического и магнитного поля связаны соотношением или $\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu\mu_0}H_0$. Скорость всех электромагнитных волн одинакова и равна $v_{_{3M}} = 1/\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} = c/\sqrt{\epsilon\mu}$, где c – скорость света в вакууме.



Коэффициент $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ называют показателем преломления среды. Для высокочастотного поля $\mu = 1$ (магнитные моменты не успевают поворачиваться вдоль очень быстро меняющего направления вектора \vec{H}). Поэтому можно считать, что коэффициент преломления прозрачной среды $n = \sqrt{\epsilon}$. Для вакуума $n_{\text{вак}} = 1$. В любой другой среде скорость распространения электромагнитных волн в *n* раз меньше скорости света в вакууме *c*.

Ещё раз напомним, что любые **немонохроматические** электромагнитные волны будут суперпозицией (суммой) монохроматических волн с разными частотами и длинами волн. Поэтому все результаты, полученные для монохроматической волны справедливы для любых немонохроматических волн.

1.5. Шкала электромагнитных волн

Все излучения, в том числе и видимый свет, являются электромагнитными волнами, т.е. быстропеременными колебаниями электрического и магнитного поля. Приведем диапазоны электромагнитных волн, образующих разные излуче-



ния, на шкале, изображенной на рисунке. Все эти излучения (электромагнитные волны) имеют одинаковую скорость $v_{3M} = c/\sqrt{\varepsilon\mu} = c/n$ Их поля \vec{E} и \vec{H} и \vec{v}_{3M} образуют правую тройку векторов, показанную выше, а их амплитуды связаны соотношением $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu\mu_0}H_0$ Для видимого света

400 нм $\leq \lambda \leq 750$ нм (или 3,7 · 10¹⁴ Гц $\leq \nu (= \omega/2\pi) \leq 7,5 \cdot 10^{14}$ Гц). Спектр видимого света имеет следующие диапазоны длин волн:

	Цвет	красный	оранжевый	желтый	зеленый	голубой	синий	фиолетовый		
λ, нм 650-78		650-780	590-650	530-590	490-530	450-490	420-450	380-420		
Заметим, что эти длины волн приведены для света, распространяющегося в вакууме.										

Если любое электромагнитное излучение распространяется в прозрачной среде с показателем преломления $n = \sqrt{\mu \varepsilon}$, то и скорость v_{3M} , и длина волны $\lambda = 2\pi v_{3M}/\omega$ этого излучения уменьшаются в *n* раз по сравнению с вакуумом. Частота ω электромагнитной волны одинакова во всех средах.

Все законы и явления, которые будут рассмотрены далее на примере видимого света (интерференция, дифракция, поляризация) справедливы для электромагнитных волн любого диапазона частот.

Замечание: каждое из излучений, показанных выше, обладает свойствами волны (непрерывность, сплошной волновой фронт) и частицы (корпускулы) или фотона. Чем больше частота излучения, тем заметнее его корпускулярные свойства, и наоборот – чем частота меньше, тем сильнее проявляются волновые свойства. При малых частотах (радиоволны) практически проявляются только волновые свойства, а при больших частотах (у-излучение) его можно представить потоком частиц – фотонов.

1.6. Энергия и импульс электромагнитной волны

Электромагнитная волна – это электромагнитное поле в непроводящей среде. Так как векторы \vec{E} , \vec{H} и $\vec{v}_{_{2M}}$ образуют правую тройку векторов, то вектор плотности потока энергии, или вектор Пойнтинга для нее имеет вид

$$\vec{j}_W = \left[\vec{E}, \vec{H}\right] = EH \cdot \vec{v}_{_{\Im M}} / v_{_{\Im M}}$$

Используя связь $\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$, находим $H = \frac{\epsilon\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}E = \epsilon\epsilon_0E \cdot v_{_{3M}}, \quad E = \frac{\mu\mu_0}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}H = \mu\mu_0H \cdot v_{_{3M}}$, откуда

$$EH = \left(\frac{1}{2}EH + \frac{1}{2}EH\right) = \mathbf{v}_{_{\mathrm{ЭM}}}\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}\right) = \mathbf{v}_{_{\mathrm{ЭM}}} \cdot w_{_{\mathrm{ЭM}}},$$
где $w_{_{\mathrm{ЭM}}}$ - плотность энергии, или энергия единицы объема

электромагнитного поля.

Поэтому плотность потока энергии, переносимой электромагнитной волной, равна произведению плотности энергии электромагнитного поля на скорость распространения волны: $\vec{j}_W = w_{_{\rm 3M}} \cdot \vec{v}_{_{\rm 3M}}$ – это энергия, переносимая через единичную площадку за единицу времени.

Замечание: формула $\vec{j}_W = w \cdot \vec{v}$ справедлива для любой волны, распространяющейся со скоростью \vec{v} и обладающей плотностью энергии w. Для акустических волн вектор \vec{j}_W называют вектором Умова.

Направление вектора Умова – Пойнтинга \vec{j}_W показывает направление переноса энергии волной, а его величина (энергия волны) всегда пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

В плоской волне амплитуды колебаний E_0 и H_0 не изменяются с пройденным волной расстоянием. Но если волна сферическая и имеет амплитуду Е0, то поток энергии, переносимой волной от источника О через любую сферическую поверхность $S = 4\pi r^2$ с радиусом *r*, должен быть одинаков (энергия не может в вакууме появляться ниоткуда и исчезать никуда):

 $\oint \vec{j}_W d\vec{S} \sim E_0^2 \cdot 4\pi r^2 = \text{const}$. Поэтому амплитуды напряженностей в сферической электромагнит-

ной волне убывают обратно пропорционально расстоянию r от источника волны: $E_0 \sim H_0 \sim 1/r$.



Пусть плоская электромагнитная волна падает на плоский участок поглощающей среды малой толщины Δx . Электрическое поле \vec{E} волны заставляет двигаться свободные электроны в этой среде, и создает ток $I = j \cdot \Delta x \Delta z$, где $\Delta x \Delta z$ – поперечное сечение участка, показанного на рисунке (будем считать, что $\mu = \epsilon = 1$). Магнитное поле волны

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E = \frac{E}{c}$$
 действует на этот ток с силой Ампера $F_A = I \Delta y B = \frac{jE}{c} \Delta x \Delta y \Delta z$.

Среда при этом должна поглощать падающую волну. За время dt в рассматриваемом участке среды поглощается и превращается в джоулево тепло энергия

 $j_W \Delta z \Delta y dt = jE \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \cdot dt = F_A \cdot c dt$, где jE – джоулево тепло, выделяющееся в единице объема среды за единицу времени; $\Delta x \Delta y \Delta z$ – объем рассматриваемого участка. Но $\vec{F}_A dt = d\vec{p}$ – это импульс, приобретаемый средой за время dt. Чтобы выполнялся закон сохранения импульса, остается предположить, что импульсом облада-

ет падающая электромагнитная волна, и этот импульс
$$d\vec{p} = \vec{F}_A dt = \frac{j_W}{c} \Delta y \Delta z dt$$
 передается среде

За время dt в ней поглотится волна, занимавшая объем $dV = cdt \cdot \Delta y \Delta z$. Следовательно, $d\vec{p} = \frac{\vec{j}_W}{c^2} dV$ и <u>импульс</u>

ċ

единицы объема электромагнитной волны равен
$$\vec{p}_1 = \frac{j_W}{c^2} = \frac{\lfloor E.H \rfloor}{c^2} = \frac{w_{3M}}{c^2}$$

(таким же импульсом обладает единица объема любого электромагнитного поля в любой среде.)

Все электромагнитные волны отталкивают поглощающие или отражающие их тела, т.е. создают на них давление

$$p = \frac{F_A}{\Delta y \Delta z} = \frac{j_W}{c} = w_{3M}$$
 (в случае поглощения падающего излучения).

Наблюдаемым примером давления, создаваемого электромагнитным излучением, могут служить кометные хвосты: испаряемый с кометы солнечным излучением газ отталкивается этим же излучением от Солнца. Как показано на рисунке справа комета может двигаться со скоростью \vec{v} "хвостом вперед".



2. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА. ЯВЛЕНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИИИ И ДИФРАКЦИИ

2.1. Суперпозиция электромагнитных волн. Условие когерентности и возникновение интерференции

<u>Интерференция волн</u> - это явление устойчивого увеличения или уменьшения результирующей амплитуды колебаний при суперпозиции (сложении) двух или более когерентных волн. При этом в разных точках пространства результирующая амплитуда различна, но в любой точке она остается постоянной в течение довольно большого промежутка времени (времени наблюдения).



Пусть в некоторую точку пространства (<u>точку наблюдения</u> Р) приходят от разных источников две электромагнитные волны с одинаковой частотой ω и с одинаковым направлением колебаний электрических векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 . Тогда, согласно принципу суперпозиции, результирующее колебание в Р будет иметь вид

$$\vec{E}_{\text{pe3}} = \vec{E}_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \vec{E}_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

причем начальные фазы колебаний $\phi_1(x, y, z)$ и $\phi_2(x, y, z)$ будут зависеть от

взаимного расположения источников и точки наблюдения, т.е. от пространственных координат точки Р. Для сложения колебаний применим метод векторной диаграммы. Как следует из ри-

сунка, квадрат амплитуды результирующего колебания в точке Р согласно теореме косину-

сов равен
$$E_{\text{pe3}}^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)) = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Волны называются некогерентными, если их разность фаз $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = f(t, x, y, z)$

зависит от времени и меняется очень быстро. Тогда среднее значение быстропеременной гармонической функции за время наблюдения $\langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = 0$ и среднее значение квадра-

та амплитуды суммарной результирующей напряженности $\left< E_{\rm pes}^2 \right> = E_1^2 + E_2^2$.

Интенсивность I (или энергия) волны (а для света – освещенность в точке наблюдения Р экрана) пропорциональна квадрату ее амплитуды, т.е. I ~ E^2 . Поэтому

на квадрату ее амплитуды, т.е. $I \sim E$. поэтому при сложении (наложении) **некогерентных** волн их интенсивности складываются, и результирующая (усредненная) интенсивность будет одинакова во всех точках пространства: $\left| \left\langle I_{pes} \right\rangle = I_1 + I_2 \right|$.

<u>Когерентными</u> называются волны, для которых разность фаз постоянна во времени $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1 = f(x, y, z)$ (но зависит от координат пространства). Очевидно, что когерентные волны обязаны иметь одну частоту ω .

В тех точках пространства (экрана), где разность фаз когерентных волн равна нечетному числу π , т.е.

 $|\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1 = (2m+1)\pi$, где *m* – целое число, результирующая амплитуда будет минимальной и равной

$$E_{\text{pe3}} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2} = |E_1 - E_2|, \text{ a наименьшая интенсивность света } \left[I_{\text{pe3 min}} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2\right].$$

В тех точках, где разность фаз когерентных волн равна чётному числу π , т.е. $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1 = 2m\pi$, где *m*-целое число, результирующая амплитуда будет максимальной и равной $E_{\text{pe3}} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2} = E_1 + E_2$, а наибольшая интенсив-

ность света
$$I_{\text{peз max}} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2$$
.



Таким образом, при сложении когерентных световых волн на экране наблюдается <u>интерференционная картина</u> – устойчивые чередующиеся полосы или пятна с максимальной и минимальной освещенностью экрана.

Если амплитуды складывающихся и интерферирующих волн одинаковы: $E_1 = E_2 = E_0$, то в точках интерферен-

ционного минимума освещенность падает до нуля, а в точках максимума возрастает до $I_{pesmax} = 4I_0 \sim 4E_0^2$.

2.2. Электромагнитная волна в диэлектрической среде. Оптическая длина пути и оптическая разность хода. Условия максимума и минимума при интерференции



Условия возникновения интерференционных максимумов и минимумов можно переписать по-другому, если учесть, что в прозрачном идеальном диэлектрике, с коэффициентом преломления n, в котором нет потери энергии на рассеяние, первая волна проходит от источника S_1 до точки наблюдения Р путь s_1 , а вторая волна проходит от источника S_2 до точки наблюдения Р путь s_2 . Пусть оба источника испускают волны в одной фазе. Тогда

$$\Delta \varphi = (\omega t - ks_2) - (\omega t - ks_1) = n(s_2 - s_1) \cdot (2\pi/\lambda_{\text{Bak}}) = k \cdot \Delta$$

Произведение пути *s*, пройденного волной на показатель преломления среды *n* называется <u>оптической длиной</u> <u>пути</u>. Разность оптических длин путей, пройденных складывающимися на экране волнами, т.е. величина $\Delta = n(s_2 - s_1)$, называется <u>оптической разностью хода</u>. Это – произведение геометрической разности путей, пройденных волнами, на показатель преломления среды *n*. Вспомним, что длина волны электромагнитного излучения в такой среде уменьшается в

п раз по сравнению с вакуумом: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = n \frac{2\pi}{\lambda_{\text{вак}}}$. Тогда из условий $\Delta \phi = \begin{cases} 2m\pi \\ (2m+1)\pi \end{cases}$ формулируем условия максимума и

минимума при интерференции:

Минимум освещенности интерференционной картины наблюдается, если оптическая разность хода Δ складывающихся когерентных волн равна нечетному числу длин полуволн, а максимум – если Δ равно четному числу длин полуволн: условие максимума: $\Delta = 2m \cdot \lambda/2$ или $\Delta \varphi = 2m\pi$

условие максимума.	$\Delta = 2m \cdot N/2$	или	$\Delta \phi = 2mn$	570		
условие минимума :	$\Delta = (2m+1) \cdot \lambda/2$	или	$\Delta \boldsymbol{\varphi} = (2m+1)\pi \int$	где	т–целое число.	

Замечание: записанные для разности фаз $\Delta \phi$ условия интерференционных максимумов и минимумов справедливы всегда, а условия для оптической разности хода Δ верны тогда, когда оба источника испускают когерентное излучение в одной фазе. Иначе надо учитывать разность их начальных фаз.

2.3. Условия пространственной и временной когерентности

Получить интерференционную картину чередующихся максимумов и минимумов освещенности не так просто, так как электромагнитные волны от разных источников некогерентны. Испус-

как как энектроматит пле Бонны от разлых него пинков некогерентны. Пенус кают эти волны разные атомы источника света S не в виде бесконечной плоской монохроматической волны $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$, а в виде отдельных коротких отрезков-<u>цугов</u> волн, показанных на рисунке. Длина цугов, испускаемых возбужденными атомами светящегося тела не превышает 0, 3÷3 м. В точку наблюдения P на экране



приходят **разные** цуги световых волн, испущенные **разными** атомами в **разные** моменты времени с **разной** начальной фазой. Их разность фаз Δφ = φ₂ – φ₁ будет меняться со временем хаотически.

Поэтому волны, испущенные разными участками светящегося тела или разными светящимися телами, не могут быть когерентными. Для создания двух или более когерентных лучей надо использовать свет, испущенный одним источником, разделяя его на два или на несколько лучей, т.е. создавая изображения источника света.

Пример: <u>билинза Бийе</u> – две половинки тонкой собирающей линзы, раздвинутые на расстояние 2a. Симметричные изображения S_1 и S_2 одного источника S испускают свет в одной фазе и поэтому когерентны.

Однако, даже если такие когерентные источники света очень малы и их размером можно пренебречь, их атомы испускают немонохроматический свет – смесь волн с разными длинами волн в интервале от λ до $\lambda + \delta\lambda$. На экране интерференционные максимумы для одной длины волны накладываются на интерференционные минимумы для другой длины волны, и интерференционная картина чередующихся полос освещенности не наблюдается. Необходимо, чтобы свет вначале проходил через светофильтр, пропускающий очень небольшой интервал $\delta\lambda$ длин волн.



Расчет показывает, что в случае одинаковой интенсивности волн с разными λ , пропущенных светофильтром, интерференционная картина может наблюдаться только до тех пор, пока оптическая разность хода лучей от двух источников не превышает $\left| \Delta = \lambda^2 / \delta \lambda \right|$ - это <u>условие временной когерентности</u>.

Если источники испускают сильно немонохроматичный свет, например белый видимый свет, для которого

400 нм < λ < 700 нм, то для него $\delta\lambda$ =300 нм, λ =< λ >≈ 550 нм, и $\Delta < \frac{550^2}{300} ≈ 1000$ нм=10⁻⁶ м. На экране глаз увидит не бо-

лее трех-пяти интерференционных полос.

Значительно сильнее немонохроматичности на исчезновение интерференционной картины влияет конечный размер (ширина) источника света b. Пусть источник ширины b создает два когерентных изображения S₁ и S₂, свет от которых создаст интерференционную картину на экране, удаленном на расстояние ℓ . Следует помнить, что рисунок не пропорционален! На самом деле должно быть $b \ll d \ll \ell$!

Очевидно, что когерентными будут только те волны, которые испускаются одними и теми же атомами, т.е. одним и тем же участком источника света.

источник 0_1 0_2 когерентные изображения эќран Пусть, например, лучи AO_1P и AO_2P , испущенные одним концом A источника

 0_1

2d

 0_{2}^{*}

дают максимум интерференции в точке P, а лучи BO_1P' и BO_2P' , идущие от другого конца B, дают максимум того же порядка в точке Р'. Чтобы на экране были видны интерференционные полосы, максимумы и минимумы двух складывающихся интерференционных картин, показанных на рисунке, не должны накладываться друг на друга. Это <u>условие про-</u>

<u>странственной когерентности</u>, которое выполнено, если расстояние $PP' < \Delta x/2$, где Δx – шири-

на одной интерференционной полосы на экране.

Расчет показывает, что такое условие можно записать в виде $2b < \lambda/\theta$, где θ – угол, под которым когерентные изображения, создающие интерференцию, видны из точки расположения источника света AB шириной b. Этот угол θ называется <u>апертурой интерференции</u>.

Даже при очень малом угле $\theta \approx 1^{\circ}$ ширина источника, например, желтого света с

 $\lambda = 560$ нм не должна превышать 16 мкм, что очень трудно до-

лγч ла́зера бипризма экран

биться на практике. В результате и углы, и размеры интерференционной картины, получаемой от обычных источников видимого света, очень малы. Как правило, такую картину можно наблюдать только в лупу или микроскоп.

Заметим, что лазерное излучение когерентно, и с помощью вначале разделенных, а потом сходящихся на экране лучей лазера можно получить интерференционную картину большого размера.

2.4. Интерференционная схема Юнга

Чтобы получить когерентные волны, надо сначала разделить волны, испущенные одними и теми же атомами одного источника, а затем складывать такие волны на экране.

Наиболее просто это сделать в интерференционном опыте Юнга. Интерференционной схемой Юнга называется оптическая система, в которой расстояние 2d между когерентными источниками много меньше расстояния L от источников до экрана. В этом случае интерферирующие волны сходятся к экрану под малым углом α , т.е. векторы \vec{E}_1 И \vec{E}_2 в



них практически параллельны.

Впервые подобную схему осуществил и наблюдал интерференционную картину Томас Юнг в 1802 г. На узкое отверстие или прорезь S в стене падал яркий солнечный свет, образуя за отверстием расходящуюся световую волну. Эта волна, в свою очередь, падала на два узких отверстия S₁ и S₂ в параллельной перегородке, стоящей за стеной. Эти от-

верстия S_1 и S_2 , пропускающие свет от одного источника S, будут двумя

когерентными источниками. На противоположной стене-экране здания, в котором нет других источников света, возникала интерференционная картина.

Для увеличения освещенности вместо отверстий используют узкие прорези-щели, перпендикулярные к плоскости. В этом случае интерференционные максимумы и минимумы на экране имеют вид полос, параллельных щелям S, S₁ и S₂.

Определим ширину полос и распределение освещенности интерференционной картины на экране, полученных при сложении двух когерентных волн в интерференционной схеме Юнга. Разность квадратов гипотенуз прямоугольных

треугольников $\Delta S_2 BP$ и $\Delta S_1 AP$ даёт $s_1^2 = L^2 + (x+d)^2$ $s_1^2 = L^2 + (x-d)^2$

$$(s_2 - s_1)(s_2 + s_1) = 4xd$$



В случае $d, x \ll L$ можно считать, что сумма путей, пройденных лучами, $(s_2 + s_1) = 2L$. Тогда оптическая разность хода лучей, пройденная в среде с показателем преломления *n* от когерентных источников S_1 и S_2 до точки наблюдения P с координатой *x* на экране $\Delta = n(s_2 - s_1) = 2xdn/L$.

Максимумы освещенности на экране видны в точках с координатами x_m , для которых $\Delta = 2m \cdot \lambda/2 = 2n x_m d/L$, т.е.

$$x_m = \frac{L\lambda}{2nd}m$$
, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Это – координаты интерференционных максимумов освещенности на экране.

Координаты минимумов освещенности находятся посередине между ними, в тех точках экрана, в которых оптическая разность хода лучей $\Delta = (2m+1)\lambda/2$. Расстояние между соседними полосами или ширина интерференционной

полосы в схеме Юнга $\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{L\lambda}{2nd}.$

Квадрат результирующей амплитуды светового вектора, пропорциональный освещенности экрана в точке с координатой *x*, получили ранее при сложении волн на векторной диаграмме. В случае одинаковой интенсивности когерент-

ных источников света, $E_1 = E_2 = E_0$, находим $E_{\text{pe3}}^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos(k\Delta) = 2E_0^2 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}n\frac{2xd}{L}\right)\right)$

откуда

ia
$$I_{\text{pe}_3}(x) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi nxd}{\lambda L}\right) \right] = 4I_0 \cos^2\left(\frac{2\pi nxd}{\lambda L}\right).$$

Здесь I_0 – освещенность, создаваемая на экране одним точечным источником S_1 (или S_2).

Освещенность экрана периодически меняется от нуля до максимальной величины $4I_0$, образуя полосы интерференционной картины ширины Δx , как показано на рисунке.

Ho если усреднить полученный результат,
$$\langle I_{\text{pes}} \rangle = \frac{1}{\Delta x} \int_{0}^{\Delta x} I_{\text{pes}} dx = \frac{2I_0}{\Delta x} \int_{0}^{\frac{L\lambda}{2nd}} \left(1 + \cos\frac{4\pi n x d}{L\lambda}\right) dx = 2I_0$$
,

то усредненная интенсивность света окажется такой же, как и при освещении экрана двумя некогерентными источниками.

При интерференции происходит перераспределение освещенности, а полный световой поток, падающий на экран, остается неизменным.

Замечание: если расстояние между когерентными источниками света много меньше длины волны, т.е. при $d \ll \lambda$, то $\cos \frac{2\pi n x d}{\lambda L} \approx 1$ и сделанный выше расчет приводит к выводу об увеличении освещенности во всех точках экрана: $I_{pe3} \approx 4I_0$! Это увеличение вызвано взаимодействием источников излучения и названо <u>сверхизлучением</u>. Находясь близко друг к другу, источники излучают больше энергии, чем на удалении. Например, две близко расположенные передающие антенны CBЧ излучают сильнее (за счет дополнительной работы генератора CBЧ).

Заметим также, что если на пути одного из световых лучей в схеме Юнга поместить прозрачную пластинку толщины h из материала с другим показателем преломления n', то оптическая длина пути, проходимая светом в пластинке, изменится на величину h(n'-n), что приведет к изменению оптической разности хода интерферирующих волн на $\delta\Delta = h(n'-n) = \Delta m \cdot \lambda$. Интерференционная картина на экране сдвинется на $\Delta m = h(n'-n)/\lambda$ полос (ширина полос не изменится). Т.е. на месте полосы с прежним номером m окажется полоса с номером $m + \Delta m$.





Схема Юнга может быть также получена в установке, названной <u>зеркалом Ллойда</u> – вторым когерентным источником света будет изображение S' в источника света S в близко расположенном зеркале. Необходимо, чтобы расстояние d от источника до зеркала было много меньше, чем расстояние L до экрана, на котором наблюдается интерференция. Такая интерференционная схема часто осуществляется на практике, потому что вместо зеркала изображение S' может создаваться любой отражающей свет поверхностью.

Но надо учесть, что

при отражении электромагнитных волн от <u>оптически более плотных сред</u> (это среды с бо́льшим показателем преломления *n*) фаза волны скачком меняется на π , а оптическая разность хода – на $k \cdot \pi = \lambda/2$. Говорят, что при отражении от оптически более плотной среды теряется полволны: к оптической разности хода Δ надо добавить или вычесть $\lambda/2$.

При отражении от оптически менее плотной среды (с меньшим показателем преломления n) или при преломлении света (прохождения волны из одной среды в другую) разность хода Δ не меняется.



При отражении от зеркала происходит потеря $\lambda/2$. Это слагаемое надо добавить к разности хода, и в схеме Ллойда координаты максимумов и минимумов интерференционной картины меняются местами (ширина полосы не изменится).

2.5. Интерференция в тонких пленках и её применение

Пусть пленка с показателем преломления *n*, находящаяся в воздухе, имеет всюду одинаковую толщину *d*. Пучок света 1, падая на пленку под углом α, частично отражается в точке О от оптически более плотной среды со сдвигом фазы на π (т.е. с изменением разности хода на $\lambda/2$), образуя пучок 1'. Но, частично преломляясь, он отражается в точке D от нижней поверхности пленки (в данном случае - без потери полуволны, поскольку отражается от менее плотной среды воздуха) и выходит из нее в точке С в виде пучка 1" параллельно пучку 1'.

Пучки света 1' и 1" когерентны, так как образуются из одного пучка 1, и поэтому могут интерферировать на экране, если их собрать с помощью линзы (роль линзы может выполнять и глаз наблюдателя). Оптическая разность хода этих световых пучков $\Delta = (\text{OD+DC}) \cdot n - \text{OB} \cdot n_{\text{BO3II}} \pm \lambda/2.$

Из прямоугольных треугольников, показанных на рисунке, следует, что $OB = OC \cdot \sin \alpha$; $OC = 2 \cdot OA = 2d \cdot tg\beta$; $OD = DC = d/\cos\beta$. Поэтому

$$\Delta = 2nd/\cos\beta - 2d\sin\alpha tg \beta \pm \lambda/2$$
. Но, согласно закону преломления,

 $\sin \alpha = \frac{n}{n_{\text{возд}}}$ $\frac{n}{2}\sin\beta = n\sin\beta$. Тогда $\Delta = 2nd(1-\sin^2\beta)/\cos\beta \pm \lambda/2 = 2nd\cos\beta \pm \lambda/2$. Заме-

няя $\cos\beta$ выражением $\sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-(\sin^2\alpha)/n^2}$, окончательно находим оптиче-

скую разность хода волн, интерферирующих в тонкой пленке:
$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha \pm \lambda/2}$$

Максимумы освещенности для данной длины волны λ будут наблюдаться при отражении света под определенными уг-

лами α_m , получаемыми из условия

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_m \pm \lambda/2} = 2m\lambda/2$$

Получаемая таким образом интерференционная картина называется интерференционной картиной полос равного наклона. Если пленка всюду имеет одинаковую толщину d и освещается <u>белым светом</u> (это свет со всеми возможными длинами волн λ), то, рассматривая её под разными углами α, наблюдатель видит, что она окрашивается то в один, то в другой цвет, длина волны которого соответствует условию интерференционного максимума.

> Чаще интерференция света на тонкой пленке осуществляется другим путем. Испущенные источником света волны имеют протяженные волновые поверхности и подходят к пленке под разными углами α. В таком случае складываются и интерферируют луч света 1, преломившийся и отразившийся от нижней поверхности пленки, и луч света 1', падавший на пленку под немного другим углом α и отразившийся от её верхней поверхности с потерей $\lambda/2$. Эти лучи когерентны, так как происходит деление одной волновой поверхности световой волны, все точки которой имеют одинаковую фазу. Возникает интерференционная картина полос равной толщины, видимая на поверхности пленки, где складываются лучи 1 и 1'. Оказывается, что оптическая разность хода этих лучей по-прежнему опреде-

ляется формулой $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha \pm \lambda/2}$. Наиболее хорошо картина интерференционных полос видна при малом угле падения $\alpha \approx 0$. Условием интерференционного максимума будет

$$\Delta = 2dn - \lambda/2 = 2m\lambda/2, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

т.е. максимумы наблюдаются в местах, где пленка имеет определенную толщину d, удовлетворяющую записанному условию. Если на пленку падает белый свет, то на пленке видны радужные полосы разных цветов спектра, длины волн λ которых соответствуют условию максимума.

Примерами таких полос равной толщины являются радужные цвета бензиновых пленок на поверхности воды или пленок окислов на поверхности металлов; разноцветные переливы бижутерии изготовленной из стекла, покрытого тонкой прозрачной пленкой.

> Используют это явление для просветления оптических линз, которые покрывают тонкой прозрачной пленкой, толщина которой d подбирается так, чтобы выполнялось условие ослабления отраженного света: $2dn \pm \lambda/2 = (2m+1)\lambda/2$. Такие лин-

> зы будут меньше отражать свет (не дают блики) для центра видимого спектра (желтозеленого диапазона), поэтому большая часть такого света будет проходить в оптическую систему (фотоаппарат). Но для световых волн на краях спектра условие минимума отраженного света не выполнено, и объективы дают фиолетово-красный отблеск.

Еще один пример – кольца Ньютона. В данном случае пленкой будет тонкая прослойка между стеклянной опорой и лежащей на ней стеклянной линзой. Точки, в которых толщина прослойки равна d, образуют окружность с радиусом r. Из прямоугольного треугольника ABC на следующем рисунке видно, что





Å

'n

э̀кран



(n



 $r^2 = R^2 - (R - d)^2 \approx 2Rd$ (малым слагаемым $d^2 \sim \lambda^2$ можно пренебречь, так как длины волн λ видимого света очень малы).

Точки, для которых оптическая разность хода световых волн, отраженных от нижней сферической поверхности линзы и от верхней поверхности опоры, удовлетворяют условию интерференционного минимума $\Delta = 2dn + \lambda/2 = (2m+1)\lambda/2$, образуют темное кольцо

интерференционной картины. Подставляя $2d \simeq r^2/R$, находим радиусы этих темных колец:

$$r_m = \sqrt{\frac{R\lambda}{n}m}$$
, где $m = 1, 2, 3, \dots$ – номер кольца.

Каким бы ни был показатель преломления *n* жидкости, заполняющей пространство между стеклами (*n* > *n*_{стекла} или $n < n_{\text{стекла}}$) потеря $\lambda/2$ происходит только при одном отражении. В центре картины (точке В) всегда будет темное пятно. Радиусы светлых колец Ньютона определяются условием интерференционного максимума и равны $r_m = \sqrt{\frac{R\lambda}{n}} \left(m - \frac{1}{2} \right)$, где m = 1, 2, 3, ... - номер светлого кольца.

Замечание: интерференцию в тонких пленках в принципе можно наблюдать не только в отраженном, но и в проходящем свете, однако, видимость интерференционной картины при этом несравненно хуже. Есть и еще одно отличие – так как не происходит отражения от оптически более плотной среды и нет потери $\lambda/2$, то полученные выше условия для максимумов и минимумов интерференции меняются местами.

2.6. Интерферометры и их использование

Интерферометры – это приборы, в которых интерференционные картины (полосы) создаются не для наблюдения интерференции, а для очень точного измерения каких-то величин – углов, длин, показателей преломления, оптических характеристик сред, спектрального состава света и т.п.

Наиболее часто для этих целей используют интерферометр Майкельсона, в котором луч света с длиной волны λ от источника S делится светоделительной пластинкой П на два луча: луч 1 отражается от пластинки П вверх, затем отражается от зеркала 3₁ и, проходя сквозь пластинку, попадает на экран Э. Луч 2 сначала проходит через пластинку, отражается от зеркала 32, от нижней поверхности П и тоже попадает на экран Э, где интерферирует с лучом 1, создавая картину параллельных полос освещенности. Ширину и число полос, видимых на экране, регулируют поворотом зеркал 31 или 32 на малый угол.

Если расстояния от пластинки П до зеркал равны l₁ и l₂, то оптическая разность хода лучей равна $\Delta_0 = (2l_2 - 2l_1) \cdot n_{\text{возд}}$, где показатель преломления воздуха $n_{\text{возд}} = 1$. Если на пути луча 2 поместить прозрачную пластинку (или кювету с газом) толщины d с показателем преломления n, то, как сказано в разделе 21.4, оптическая длина пути этого луча увеличится на 2d(n-1), а интерференционная картина на экране сместится на $N = 2d(n-1)/\lambda$ полос. Если зеркало 3_2 передвинуть на расстояние *b*, то картина сместится на $N = 2b/\lambda$ полос.

По числу смещенных полос можно очень точно измерить показатель преломления n среды или расстояния b или *d* (для этого меняют исследуемую пластинку на эталонную, толщина которой и показатель преломления известны).

Остальные интерферометры действуют по тому же принципу: на пути интерферирующих лучей устанавливают исследуемое и эталонное тело. Например – в интерферометре Рэлея свет от двух щелей S₁ и S₂ (когерентных источников) создает на экране две интерференционные картины 12 и 34. Если на пути верхних лучей 1 и 2 установить предметы одинаковой длины l (кюветы с газом, например) но с разными показателями преломления n₁ и n₂, то верхняя интерференционная картина 12 сдвинется относительно нижней 34 на $N = l(n_2 - n_1)/\lambda$ полос. Визуально можно определить сдвиг полос на величину $N = \frac{1}{40}$, что для длины l = 1 м и позволит измерить изменение $n_2 - n_1 \approx 10^{-8}$! Очень точное изменение пока-

зателя преломления среды позволяет очень точно измерить связанные с ним величины (давления, сдвиги, сжатия и т.п.).

Для определения размера очень удаленных источников (диаметра звезд) Майкельсон применил звездный интерферометр. Лучи света от звезды размером b, удаленной от Земли на расстояние L, попадают на зеркала 3, раздвинутые на расстояние 2h, а затем проходят через две щели S1 и S2, которые будут когерентными источниками света. Их свет с помощью линзы складывается в точке Р экрана, образуя интерференционную картину. раздвигая зеркала, т.е. увеличивая расстояние 2h, изменяют малый

угол $2\theta \approx tg(2\theta) = 2h/L$. Согласно условию пространственной когерентности полосы интерференционной картины ис-



 $2\theta - 2h$

экран







отраженный

чезнут при выполнении условия $b \cdot 2\theta \ge \lambda/2$. Первой звездой, диаметр которой был измерен по исчезновению интерференционной картины была Бетельгейзе в созвездии Ориона. Он оказался равным $b \approx 4 \cdot 10^8$ км, что больше диаметра земной орбиты $\approx 3 \cdot 10^8$ км.



Еще точнее можно измерить размер удаленного объекта по радиоизлучению с большой длиной волны, например, $\lambda = 10$ см, с помощью <u>радиоинтерферометра</u>, антенны-приемники которого (аналог щелей) можно установить на противоположных сторонах Земли с диаметром $2R \approx 7500$ км. Это позволит различить на Луне, расстояние до

которой
$$L \approx 380000$$
 км, излучающий предмет размером $b = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{L}{2R} \approx 1,5$ м!

2.7. Принцип Гюйгенса-Френеля



Каждый участок <u>волнового фронта</u> или волновой поверхности электромагнитной волны создан переменным электромагнитным полем, которое, согласно уравнениям Максвелла, снова порождает электромагнитную волну. В этом заключается принцип, предложенный Гюйгенсом:

Каждая точка волнового фронта является источником сферических вторичных электромагнитных волн, имеющих ту же частоту и распространяю-

щихся во всех направлениях. Вторичные волны, испускаемые всеми участками волнового фронта распространяющейся волны, складываются и их огибающая спустя любое малое время Δt представляет собой новое положение волнового фронта, сдвинутое на расстояние $\Delta r = c\Delta t$. При этом в направлении, обратном направлению распространения падающей волны, вторичные волны колеблются в противофазе с падающей волной и компенсируют её поле, свет распространяется в одном направлении.





Принцип Гюйгенса позволяет качественно объяснить явление огибания светом препятствий. Направим на отверстие параллельный пучок света с плоскими волновыми поверхностями. Изображая положение огибающей вторичных волн за отверстием, видим, что часть световых лучей расходится в стороны. Это позволяет видеть освещенную щель в приоткрытой двери из любой точки темной комнаты, а не только из точек, в которых непосредственно виден источник света в соседней комнате.

Позже Френель дополнил принцип Гюйгенса, предположив, что все складывающиеся вторичные волны должны интерферировать и создавать картину устойчивых максимумов и минимумов освещенности на установленном экране. Это явление назвали <u>дифракцией</u> электромагнитных волн.

Как видно, явления интерференции и дифракции имеют одинаковую физическую природу. Только при интерференции складывается конечное число когерентных волн, приходящих от когерентных источников света, а при дифракции – **бесконечное** число вторичных волн, приходящих от всех точек волнового фронта (а точнее – от всех точек волновой поверхности, положение которой совпадает с положением препятствия, находящегося на пути световой волны).

В соответствии с <u>принципом Гюйгенса-Френеля</u> при сложении вторичных электромагнитных волн, приходящих от каждой точки такой волновой поверхности, наблюдается <u>дифракционная картина</u> чередующихся максимумов и минимумов освещенности, похожая на интерференционную картину.

2.8. Метод зон Френеля. Спираль Френеля

В 1818 г. Френель представил трактат, в котором утверждалось, что установив между точечным источником света S и экраном непрозрачное препятствие с небольшим круглым отверстием (рисунок а), мы получим в центре экрана O при определенном соотношении между радиусом отверстия r и расстоянием до экрана b не светлое, как следует из геометрической оптики, а темное пятно! И наоборот, установив на пути света не отверстие, а круглое непрозрачное препятствие радиуса r (рисунок б) в центре экрана O будем наблюдать не темное, а светлое пятно. Опыты Френеля доказали не корпускулярную (свет – это движение каких-то частиц), а волновую природу света.

Объясним полученный результат методом, предложенным Френелем. Волновая поверхность света, испускаемого точечным источником S и совпадающая с местоположением препятствия, является сферой радиуса a, где a – расстояние от источника до препятствия. Разобьём эту поверхность на очень узкие участки-кольца радиуса r и ширины δr такие, что их площадь $\delta S = 2\pi r \cdot \delta r$ одинакова. От каждого такого участка в центральную точку экрана О приходит волна с вектором напряженности электрического поля $\delta \vec{E}$, сдвинутым по фазе на величину $k \cdot s$ относительно вектора напряженности \vec{E}_0 на поверхности сферы. Так как расстояние s от каждого последующего участка до точки О чуть больше, чем от предыдущего на величину δs , то имеется сдвиг фаз между волнами, приходящими от соседних участков $\delta \varphi = k \cdot \delta s = 2\pi \delta s / \lambda$.





Величины векторов $\delta \vec{E} \sim 1/s$ сферических волн, приходящих от соседних участков мало отличаются друг от друга, но всё же от каждого последующего участка приходит волна с чуть меньшим световым вектором $\delta \vec{E} \sim 1/(s + \delta s)$, чем от предыдущего. Если сложить все эти векторы методом векторной диаграммы, то каждый последующий вектор $\delta \vec{E}$ повернут относительно предыдущего на малый угол $\delta \phi$ и имеет чуть меньший размер. В результате получается <u>спираль Фре-</u>

неля, показанная на рисунке.

Чтобы найти суммарный вклад всех участков волновой поверхности на рисунке, надо соединить начало первого из векторов $\delta \vec{E}$ на спирали Френеля с концом последнего вектора

 $\delta \vec{E}$. Вообще говоря, если открыта вся волновая поверхность большого размера, то вклады $\delta \vec{E}$ от её удаленных участков должны стремиться к нулю, и спираль Френеля сходится в точку. Поэтому вектор \vec{E}_0 на диаграмме Френеля является суммарным световым вектором, который точечный источник света S на создает в центре экрана O в том случае, когда между точкой S и экраном нет никакого препятствия.

Разобьём теперь волновую поверхность точечного источника света не на бесконечно малые участки площади δS , а на конечные участки, называемые зонами Френеля. <u>Зона Френеля</u> – это участок волновой поверхности, расстояния от противоположных границ которого до точки наблюдения дифракционной картины отличаются на $\lambda/2$, где λ – длина волны света.

В случае точечного источника света зонами Френеля, как показано на рисунке, будут кольца на сферической волновой поверхности радиуса *a*. Волны, приходящие от соседних зон Френеля в точку наблюдения О сдвинуты по фазе на $\Delta \varphi = k \cdot \lambda/2 = 2\pi/\lambda \cdot \lambda/2 = \pi$.

Поэтому создаваемые ими векторы \vec{E} направлены в противоположные стороны и компенсируют друг друга. Это видно на спирали Френеля (рисунок ниже), где



указаны точки, соответствующие границам зон Френеля. Складывая все векторы $\delta \vec{E}$ в пределах 1-й зоны Френеля, получаем вектор \vec{E}_1 – суммарный вклад всех участков 1-й зоны Френеля. Вектор \vec{E}_2 будет суммарным вкладом всех участков 2-й зоны Френеля. Как видно из рисунка, он направлен противоположно вектору \vec{E}_1 . **Вклады соседних зон Френеля всегда компенсируют друг друга**. \vec{E}_3 – суммарный вклад участков 3-й зоны Френеля и т.п.

Получаем простой метод расчета дифракции – <u>метод зон</u> Френеля.

Для любой точки экрана, в которой наблюдается дифракционная картина надо разбить волновую поверхность световой волны в месте нахождения препятствия на зоны Френеля. Так как границы зон зависят от расстояний до выбранной точки наблюдения, то разбиение волновой поверхности на зоны Френеля будет различным для разных точек экрана. Далее надо соединить на диаграмме Френеля точки, соответствующие началу и концу зон Френеля, которые открывает препятствие. Получим результирующий вектор \vec{E} волны, прошедшей сквозь препятствие, в выбранной точке экрана.

Если препятствие открывает четное число зон Френеля, то их вклады компенсируются, и в точке наблюдения образуется минимум дифракционой картины (темное пятно). Если открыто нечетное число зон Френеля, то результирующий вектор $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_{2n+1}$ не скомпенсирован, и в точке наблюдения видно светлое пятно.

2.9. Дифракция света на круглом препятствии

Наиболее просто с помощью метода Френеля рассчитать освещенность дифракционной картины, созданной препятствием в виде круглого отверстия радиуса $r_{\text{отв}}$ в непрозрачной заслонке, установленной между точечным монохроматическим источником S света с длиной волны λ и экраном. Пусть *a* – расстояние от источника до препятствия, *b* – рас-

стояние от препятствия до экрана. Вычислим освещенность света в центре экрана на оси отверстия, соединяющего источник света S и точку наблюдения O.

В этом случае радиус m – й зоны Френеля r_m на сферической волновой поверхности радиуса a легко найти с помощью рисунка справа, где из двух прямоугольных треугольников Δ SBC и Δ OBC следуют соотношения

$$CB^2 = SC^2 - SB^2$$
 или $r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2$,
 $SC^2 - SB^2 = CB^2 = CO^2 - BO^2$ или $a^2 - (a - h_m)^2 = (b + m\lambda/2)^2 - (b + h_m)^2$.

ртв

экра́н

0





Раскрывая скобки во втором соотношении и пренебрегая величиной $(m\lambda/2)^2$ второго порядка малости $(a, b \gg \lambda)$, находим малую величину $BA = h_m = bm\lambda/2(a+b)$. Подставляя эту величину в первое соотношение, и опять пренебрегая малым слагаемым $h_m^2 \sim \lambda^2$, находим радиус зон Френеля в случае дифракции света от точечного источника:

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}$$
, где $m = 1, 2, 3, \dots$.

Заметим, что радиус зон Френеля зависит от расстояния b между препятствием (отверстием) и экраном. Отодвигая экран, т.е. увеличивая расстояние b, мы будем увеличивать радиус зон r_m. Поэтому отверстие будет открывать разное число $m_{\text{откр}}$ открытых зон Френеля при разном положении экрана: $r_m = r_{\text{отв}}$, откуда $m_{\text{откр}} = (a+b)r_{\text{отв}}^2/ab\lambda$. Результирующий световой вектор в точке наблюдения О получаем, соединяя начало и конец открытых зон Френеля на диаграмме спирали Френеля. Если препятствие убрать, то освещенность в точке О равна $I_0 \sim E_0^2$. Если отверстие открывает нечетное число зон Френеля $(m_{\text{откр}} = 1, 3, 5, ...)$, то освещенность в точке О возрастает в 4 раза: $I_{\text{O}} \sim E_1^2 = (2E_0)^2 = 4I_0$ (витки спирали Френеля расположены очень плотно и $E_1 \approx E_3 \approx E_5 \approx ... \approx 2E_0$).

Если отверстие открывает четное число зон Френеля $(m_{\text{откр}} = 2, 4, 6, ...)$, то их вклад компенсируется и освещенность в центре экрана О практически равна нулю (темное пятно).



Если отверстие открывает нецелое число зон Френеля, например $m_{\text{откр}} = 3/2$,

то, как видно из диаграммы слева, величина вектора \vec{E} в центре экрана равна $E_{3/2} = \sqrt{2}E_0$, и освещенность этой точки в два раза превышает освещенность экрана

при отсутствии препятствия: $I_{\rm O} \sim E_{3/2}^2 = 2E_0^2 = 2I_0$.

В случае, когда препятствием является маленький непрозрачный диск с радиусом r, закрывающий часть первых зон Френеля, вклад этих зон, отмеченных штриховой линией на диа-

грамме спирали Френеля справа, учитывать не надо, а вклад всех остальных открытых зон Френеля в сумме создает световой вектор величиной $E_{\text{откр}} \approx E_0$. Поэтому в центре экрана О наблюдается светлое пятно, названное пятном Пуассона. Это пятно исчезает, когда радиус диска велик и наблюдается геометрическое изображение тени от диска.



Если на препятствие падает плоская световая волна с плоской волновой поверхностью (рисунок слева), то зонами Френеля будут кольца на этой поверхности с радиусами r_m, которые просто вычис-

лить для прямоугольного $\triangle OAC$: $CA^2 = CO^2 - AO^2$ или

волновая поверхность $b+m\lambda/2$ 0 h 1-я зона Френеля экра́н 2-я зона Френеля . m-я зона Френеля линзы. Такая система, называемая камеройобскурой, может быть использована в

 ${r_m}^2 = \left(b + m\lambda/2\right)^2 - b^2$. Пренебрегая слагаемым $\left(m\lambda/2\right)^2$, находим радиус зон Френеля в случае падения на препятствие плоской световой волны:

$$r_m = \sqrt{bm\lambda}, \ m = 1, 2, 3, \dots$$

Эта формула получается как частный случай дифракции света от точечного источника при $a \rightarrow \infty$. Меняя расстояние b между экраном и препятствием, мы будем изменять число зон Френеля, открытых препятствием, т.е. принципиально дифракционная картина ничем не будет отличаться от картины, получаемой для точечного источника света.

Пример: благодаря явлению дифракции маленькое отверстие радиуса r в непрозрачном ящике обладает свойствами

качестве простейшего фотоаппарата.



экра́н

Ēоткр

препятствие

Действительно, пусть расстояние до фотографируемого предмета равно а. Для того, чтобы свет, прошедший сквозь отверстие, создавал максимальную освещенность, т.е. создавал изображение на помещенной внутрь камеры фотопластинке, её надо установить на таком расстоянии b, чтобы отверстие открывало одну зону Френеля. При этом, согласно $r = r_1 = \sqrt{ab\lambda/(a+b)}$. Если предмет удалить на очень большое расстояние, то свет от него подходит к отверстию в виде плоской волны. Максимальная освещенность (изображение) на фотопластинке получится, если, разместить её на расстоянии b', для которого $r = r_1 = \sqrt{b'\lambda}$. Это расстояние аналогично фокусному растоянию тонкой линзы, которая собирает параллельные лучи света в точке фокуса. Приравнивая записанные выражения, получим

формулу тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b'} = \frac{1}{f}$.

Таким образом маленькое отверстие, открывающее одну зону Френеля, обладает свойствами линзы и создает изображение предмета на фотопластинке, хотя показали мы это только для точечного премета. В действительности камера-обскура фотографирует предметы любого размера, даже если её установить на малом расстоянии *a*. Достоинством камеры-обскуры служит то, что радиус отверстия рассчитывается для определенной длины волны λ . Настроив камеру-обскуру на длину волны $\lambda \sim 580-600$ нм (цвет человеческого лица), мы получим на фотографии все контрастные детали, а изображения всех морщинок, теней, синяков и т.п. будут автоматически ослаблены, отретушированы. Обычно такие "омоложенные" фотографии кинозвезд делает специальный художник-ретушер.

2.10. Дифракция света на узкой щели



Метод зон Френеля удобно применить и в том случае, когда плоская световая волна проходит через узкую щель ширины a, а дифракционная картина наблюдается на очень большом удалении b или же в фокальной плоскости собирающей линзы, установленной за препятствием. Каждая точка щели испускает вторичные волны по всем направлениям. Рассмотрим те из них, которые уходят под углом φ к направлению распространения падающего света. Линза с фокусным расстоянием fсоберет эти параллельные лучи в точке Р экрана, расположенного в её фокальной плоскости. Луч, проходящий через центр линзы О не преломляется, поэтому координата точки Р относительно центра экрана $x = f \cdot tg \varphi$.

Условие дифракционных минимумов можно получить, если разбить волновую поверхность падающей волны (поверхность щели) на зоны Френеля – полосы, расстояние от границ которых до новой

волновой поверхности волны, уходящей под углом φ , отличается на $\lambda/2$. Число зон Френеля, на которое разбивается поверхность щели, зависит от угла наблюдения φ . Если щель разбита на четное число 2m зон Френеля, вклады которых компенсируют друг друга, то в точке наблюдения виден дифракционный ми-

нимум. Как видно из прямоугольного треугольника на рисунке, <u>условием дифракционного минимума</u> <u>при дифракции света</u> <u>на узкой щели</u> ширины *a* будет $a\sin \varphi = 2m \cdot \lambda/2$, где $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$



Зависимость освещенности I дифракционной картины от угла дифракции φ показана на рисунке слева. Она имеет вид центральной яркой полосы, параллельной щели (<u>дифракционное изображение ще-</u><u>ли</u>), окаймленной слабыми боковыми полосами. Ширина центральной полосы, как видно из этого рисунка, в два раза шире ширины всех боковых полос в том случае, когда $\lambda/a \ll 1$. Центр этого изображения соответствует m = 0 или $\varphi = 0$. Боковые максимумы намного меньше центрального: $I_0: I_1: I_2: I_3 = 1:0,0472:0,0165:0,0083$,

т.е. большая часть прошедшего через щель света попадает в пределы центрального дифракционного максимума – <u>дифракционного изображения щели</u>.

2.11. Многолучевая интерференция. Дифракционная решетка и принцип спектрометрии. Критерий Рэлея. Разрешающая способность дифракционной решетки.

Практический интерес представляет интерференция не двух, а большего числа когерентных световых лучей. Например – интерференция в <u>дифракционной решетке</u>. Это система из *N* одинаковых щелей, расположенных на равном расстоянии *d* друг от друга, которое называется <u>постоянной решетки</u>. При нормальном падении на решетку плоской световой волны с длиной волны λ каждая щель будет когерентным источником, излучающим свет **во всех направлениях**. Линза (роль которой может выполнять глаз) соберет **параллельные** пучки _{волновой фронт падающей световой}

света в одну точку Р экрана (параллельные пучки, распространяющиеся в других направлениях, будут собраны в других точках экрана).

Как видно из рисунка, оптическая разность хода волн, приходящих от соседних щелей, равна $\Delta = d \sin \phi \cdot n_{\text{воздуха}} = d \sin \phi$, т.е. ко-



лебания вектора \vec{E} от каждой последующей щели сдвинуты по фазе на





 $\alpha = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin \phi$ по сравнению с колебаниями \vec{E} от предыдущей щели. Следовательно, $\vec{E}_{\text{pe3}} = \vec{E}_0 \overline{\cos(\omega t + \alpha_0)} + \vec{E}_0 \cos(\omega t + \alpha_0 + \alpha) + \vec{E}_0 \cos(\omega t + \alpha_0 + 2\alpha) + \dots + \vec{E}_0 \cos(\omega t + \alpha_0 + (N-1)\alpha)$ or 1-ой щели or 2-ой щели or 3-ой щели or N-ой щели

(амплитуды колебаний \vec{E}_0 в световой волне, приходящей от каждой щели, одинаковы).

Сложим эти колебания, пользуясь методом векторной диаграммы. Концы векторов \vec{E}_0 лежат на некоторой окружности радиуса R, а результирующий вектор \vec{E}_{pes} образует хорду этой окружности с углом Να. Из прямоугольного треугольника АОВ находим $\frac{E_{\text{pe3}}}{2} = R \sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right)$, а из сегмента этой диаграммы сле-

дует $\frac{\dot{E}_0}{2} = R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Исключая из этих двух равенств неизвест-

ный радиус *R*, получим $\frac{E_{\text{pe3}}}{E_0} = \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$, т.е. результирующая

освещенность в точке наблюдения Р экрана определяется формулой

где I₀ – освещенность, созданная одной щелью. При $\alpha/2 = \pi m$, где *m* - целое число, и числитель, и знаменатель этого выражения стремятся к нулю. Поэтому, используя правило Лопиталя, находим $\left| \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \right|_{\alpha \to 2\pi m} \to N$.

Это – условие главных интерференционных максимумумов интенсивности света, прошедшего через дифракционную решетку. Они получаются из условия $\alpha = 2\pi m = (2\pi/\lambda) \cdot d \sin \phi$ или $|d\sin \varphi = m\lambda|$ где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ При выполнении этого условия, т.е. в точках экрана, соответствующих условиям главных максимумов, освещен-

ность I_{pe3} возрастает по сравнению с освещенностью I_0 , созданной одной щелью, в N^2 раз: $I_{pe3} = N^2 I_0$

Но между соседними главными максимумами расположены N-1 минимумов освещенности, соответствующих нулям числителя: $N\alpha/2 = \pi m$, где m-целое число, не равное $0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \dots$, т.е. $\alpha = 2\pi m/N = (2\pi/\lambda) \cdot d\sin \phi$ или $d\sin\phi = m\lambda/N$ где $m \neq 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, ...$ - это условие интерференционных минимумов на дифракционной решетке.



λ+Δλ

 $\sin \varphi$

Получаемая при этом интерференционная картина такова: очень яркие и узкие линии, соответствующие главным интерференционным максимумам для света с длиной волны λ, разделенные участками, где

освещенность (интенсивность) света очень мала из-за наличия дополнительных минимумов. Если на решетку направить белый свет с разными длинами волн λ , то она разделит его на все цвета радуги, образуя спектры порядка *m*.

Дифракционную решетку используют в

спектрографах и спектрометрах для разделения спектральных линий с разными λ . По критерию Рэлея два пика интенсивности, соответствующих линиям λ и $\lambda + \Delta \lambda$ еще можно увидеть раздельно, если минимум первого пика совпадает с

максимумом второго, как показано на рисунке ниже, где точка А соответствует главному интерференционному максимуму порядка *m* для линии $\lambda + \Delta \lambda$ и первому интерференционному минимуму сбоку от мак-

симума порядка *m* для линии
$$\lambda$$
, т.е. $d \sin \varphi = m(\lambda + \Delta \lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda$ или $\Delta \lambda = \frac{\lambda}{mN}$.

Таким образом, решетка может разделить на видимые раздельно линии (пики) свет с длинами волн, различающимися на величину $\Delta \lambda \ge \lambda/mN$ (в спектре m – го порядка).

Отношение
$$\lambda/\Delta\lambda = mN$$
 называется разрешающей способностью дифракционной ре-

шетки

Из этой формулы следует, что разрешающая способность пропорциональна числу щелей N. Чем больше N, тем более узкие и яркие линии получаются в интерференционной картине.



белый ≬1рез

фсзжк

 $\frac{2\lambda}{d}$

m=2

m=1

 $\sin\varphi$

кжзсф

m=-2 m=-1



2.12. Распределение интенсивности света, прошедшего через дифракционную решетку

При прохождении света через дифракционную решетку с постоянной d и с шириной каждой щели а картина интерференции лучей, приходящих от различных щелей, накладывается на дифракционную картину, получаемую от каждой щели. В результате на экране видно следующее распределение интенсивности света в зависимости от угла ф отклонения лучей.

На этом рисунке взято условие a = d/4. Поэтому положение спектров 4-го, 8-го и т.п.

порядков совпадает с положением дифракцион-

ных минимумов на щели и эти спектры не видны. С увеличением угла ф интенсивность І наблюдаемых спектров уменьшается пропорционально интенсивности дифракционного минимума.

23.13. Дифракция рентгеновских лучей. Уравнения Лауэ и условия Вульфа-Брэггов

Из условия дифракционных минимумов и максимумов следует, что для образования интерференционной или дифракционной картины необходимо, чтобы размеры препятствий были сравнимы с длиной волны: *a*, *d* ~ λ .

Рентгеновское излучение имеет длины волн $\lambda_{\text{pent}} \sim 0.03 \div 0.7$ нм. Препятстви-

ем, сравнимым по размерам с этой длиной волны, будет кристаллическая решетка (металла), в которой расстояние между соседними атомами (узлами) равно *d* ~ 0,1 нм. Т.е. кристаллическая решетка вещества является естественной дифрак-

ционной решеткой для рентгеновских лучей.







Если лучи падают на нее под углом ϕ_0 , то отклоняясь на атомах вещества под некоторым углом ϕ , они приобретают разность хода (для лучей, уходящих от соседних узлов решетки) $\Delta = \Delta_1 - \Delta_0 = d \sin \varphi - d \sin \varphi_0$. Условие главных дифракционных максимумов на такой решетке имеет вид

$$\Delta = d(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = 2m \frac{\lambda}{2}.$$

Но кристаллическая решетка вещества трехмерна. Поэтому при падении рентгеновского излучения на трехмерный кристалл необходимо записывать условия главных максимумов для одномерных решеток, ориентиро-

ванных вдоль трех пространственных осей симметрии кристалла x, y, z:

$$\begin{cases} d(\sin\varphi_x - \sin\varphi_{0x}) = 2m_x \cdot \lambda/2; \\ d(\sin\varphi_y - \sin\varphi_{0y}) = 2m_y \cdot \lambda/2; \\ d(\sin\varphi_z - \sin\varphi_{0z}) = 2m_z \cdot \lambda/2; \end{cases}$$

Это - <u>система уравнений Лауэ</u>, записанная для кристалла с кубической решеткой, где m_x, m_y, m_z - независимые

целые числа. Эти уравнения необходимо дополнить стереометрическим условием для углов ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z , задающих направление распространения отклоненного луча:

$$\sin^2 \varphi_x + \sin^2 \varphi_y + \sin^2 \varphi_z = 1.$$

Три неизвестные ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z , оказываются связанными четырьмя уравнениями. Поэтому при

дифракции на трехмерной пространственной решетке максимумы освещенности на экране наблюдаются лишь при отдельных значениях углов отклонения. На экране видны не сплошные полосы интерференции, а отдельные симметрично расположенные пятна!

Интерференционную картину в рентгеновских лучах (рентгенограмму) получают следующими методами:

1. Метод Лауэ. Рентгеновскими лучами облучают монокристалл (кристалл с целой кристаллической решеткой). Пятна дифракционных максимумов расположены

симметрично из-за симметрии кристалла. Полученная рентгенограмма (рисунок справа) называется лауэграм-<u>мой</u>.

2. Метод Дэбая-Шерера. Облучают кристалл, измельченный в порошок из мелких кристаллов. Так как мелкие кристаллы ориентированы под всеми углами,

то пятна, получаемые от каждого мелкого кристалла в

разных точках экрана, сливаются в сплошные концентрические линии. Полученная рентгенограмма (рисунок слева) называется дебаеграммой.



фотопленка

рентген. ЛУЧ



Другой метод Вульфа-Брэггов анализа дифракционных максимумов для кристаллической трехмерной решетки полностью эквивалентен уравнениям Лауэ. Он заключается в следующем: через узлы кристаллической решетки проводят параллельные плоскости, называемые атомными слоями. Если на них падает плоская волна, то вторичные волны, создаваемые атомными слоями, также будут плоскими, а суммарное действие атомного слоя состоит в отражении плоской волны (угол отражения равен углу падения). Введем θ - угол скольжения. Тогда лучи, отраженные от двух соседних атомных слоев, имеют разность хода $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 2d \sin \theta$.



Условие максимума при их интерференции: $\Delta = 2d \sin \theta = 2m \frac{\lambda}{2}$, где $m - \frac{\lambda}{2}$

целое число называют условием Вульфа-Брэггов для дифракции рентгеновских лучей. Как видно на рисунке, параллельные плоскости атомных слоев можно провести через узлы кристаллической решетки разным способом (под разными углами). Каждая система параллельных атомных слоев будет соответствовать разному расстоянию d между ними и разной группе пятен на лауэграмме.

Применения дифракции рентгеновских лучей:

1. <u>Рентгеновская спектроскопия</u> – на вещество с известными межатомными расстояниями d под определенным углом фо направляют исследуемые рентгеновские лучи. По положениям пятен главных дифракционных максимумов на экране вычисляют неизвестную длину волны λ_{peht} излучения.

2. Рентгеноструктурный анализ – рентгеновское излучение с известной длиной волны под разными углами направляют на неизвестный кристалл и по положению пятен на рентгенограмме находят расстояние между атомами. Тем самым определяют вид и структуру кристалла.

3. СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН.

3.1. Поляризация электромагнитных волн. Поляризаторы и закон Малюса



В электромагнитной (световой) волне колебания электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей происходят перпендикулярно направлению движения волны (они всегда образуют правую тройку векторов), отчего такие волны называют поперечными.

Естественным называется свет, в кото-

ром колебания вектора \vec{E} (или \vec{H}) происходят беспорядочно, в любом направлении, перпенди-

кулярном к скорости распространения волны.

Если же колебания светового вектора \vec{E} (или \vec{H}) как-либо упорядочены, то свет называется поляризованным.

В плоскополяризованной электромагнитной волне колебания вектора



волна с круговой поляризацией.

В приведенных выше примерах свет полностью поляризован. Если же световой луч складывается из естественного и поляризованного света, то он называется частично поляризованным.

Проще всего частично или полностью поляризованный свет получить при отражении естественного света от плоской граница диэлектрика.

Плоскость падения светового луча всегда образована падающим лучом и нормалью к отражающей поверхности. Пусть естественный свет падает под углом α на границу раздела двух диэлектрических сред с показателями преломле-

вокруг направления скорости волны - это

ния n_1 и n_2 . Вектор \vec{E} в ней колеблется и в плоскости падения света (эти колебания $\vec{E}_{||}$ обозначены на рисунке стрелочками), и перпендикулярно к плоскости падения (эти колебания \vec{E}_{\perp} обозначены на рисунке точками). Проходящая через среду с показателем преломления n_2 преломленная волна заставляет электроны среды

двигаться с ускорением и испускать вторичные электромагнитные волны, которые и образуют отраженную волну.

Но, как показано в разделе 21.5, ускоренные заряды не излучают волн вдоль направления своего колебания, т.е. вдоль направления $\vec{E}_{npen||}$. Поэтому в от-

раженном луче нет колебаний $\vec{E}_{\text{отр}\parallel}$ в этом направлении, указанном на рисунке стрелкой. Для такого направления





 $\alpha + \beta = \pi/2$ и из закона преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\pi/2 - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = tg \alpha$ получаем закон Брюстера:

при падении естественного света на границу раздела двух непроводящих сред под углом Брюстера $|\alpha_E = \arctan(n_2/n_1)|$ отраженный свет будет полностью поляризован: колебания \vec{E} в нем происходят только перпендикулярно плоскости падения света.

Так, солнечный свет становится плоскополяризованным для угла скольжения

 $\gamma = 90^{\circ} - \alpha_{E} = 90^{\circ} - \operatorname{arctg} 1,33 \approx 37^{\circ}$ к поверхности воды с показателем преломления n = 1,33. Глаз при этом никаких различий не заметит: физиологическое действие поляризованного света аналогично действию естественного света.

Если падение света происходит под другим углом $\alpha \neq \alpha_{5}$, то отраженный свет

будет частично поляризован. Преломленный луч всегда частично поляризован в плоскости падения света. На практике для получения плоскополяризованных электромагнитных волн используют среды, обладающие

свойством дихроизма: они пропускают электромагнитные волны только с одной поляризацией, когда вектор \vec{E} падающего света колеблется вдоль направления оси пропускания, и поглощают волны с другой, перпендикулярной поляризацией. Пластинку из такой среды называют поляризатором. Промышленные поляризаторы – это гибкие целлулоидные пленки, в которые внедрены кристаллики герапатита, обладающие свойством дихроизма.

Пусть вектор \vec{E} падающей на поляризатор электромагнитной волны составляет угол α с осью пропускания поляризатора. Разложим этот вектор на две составляющие: $\vec{E}_{\parallel} = \vec{E} \sin \alpha$, которая будет поглощена поляризатором, и $\vec{E}_{\perp} = \vec{E} \cos \alpha$, которая пройдет через поляризатор. Так как интенсивность света, падающего на поляризатор, равна $I_{\text{пад}} = \vec{E}^2$, а интенсивность света, прошедшего через поляризатор, $I_{\text{прош}} = \vec{E}_{\perp}^2$ то получаем закон Малюса:

интенсивность прошедшего через поляризатор света равна интенсивности падающего на поляризатор плоскополяризованного света, умноженной на квадрат косинуса угла между плоскостью поляризации падающего света и $I_{\text{прош}} = I_{\text{пал}} \cos^2 \alpha$ осью пропускания поляризатора

Если на поляризатор падает естественный свет, в котором векторы \vec{E} все время меняют ориентацию и угол α с осью пропускания поляризатора меняется со временем хаотически, через поляризатор пройдет свет с интенсивностью $|I_{\text{прош}} = I_{\text{пад ест}} \langle \cos^2 \alpha \rangle = I_{\text{пад ест}} / 2|$, так как среднее значение $\langle \cos^2 \alpha \rangle = 1/2$.

Пример: естественный свет с

интенсивностью I₀ проходит через систему из трех последовательных поляризаторов, причем оси пропускания второго и третьего поляриза-

торов составляют углы α и 90° с осью первого поляризатора (см. рисунок). Величины интенсивностей

 $\overset{\text{L}_{\text{L2}}}{\Rightarrow} I_3 = \frac{I_0}{2} \cos^2 \alpha \cos^2 (\frac{\pi}{2} - \alpha)$ естественный интенсивностью поляризатор 2 поляризатор 1

света, прошедшего через каждый из поляризаторов в соответствии с законом Малюса показаны на этом рисунке. Если второй поляризатор убрать, то система перестанет пропускать свет.

Еще один пример применения поляризаторов – демонстрация стереоскопических фильмов. Два сдвинутых друг относительно друга изображения записаны в свете, поляризованном во взаимно перпендикулярных направлениях. Очки с поляризаторами вместо стекол пропускают одно изображение в левый глаз, а второе - в правый. Мозг воспринимает смещение изображений, видимое разными глазами как объемную картину.



3.2. Двойное лучепреломление. Оптически активные среды

Свойствами поляризаторов, как было сказано, обладают и некоторые естественные кристаллы с решеткой не кубической формы (тетраэдрическая, гексагональная решетка). В таких кристаллах диэлектрическая проницаемость принимает разные значения вдоль разных направлений и задается тензо-

ром $\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$. Если вдоль всех направлений из точки О кристалла отложить соот-

ветствующие значения є, то получится поверхность, образованная вращением эллипса (эллипсоид).

Одна из главных осей этого эллипсоида, например, ось z, называется оптической осью кристалла. Любой луч естественного света, проходя через такой кристалл, разделяется на два плоскополяризованных луча:



1) необыкновенным лучом называется луч, в котором световой вектор \vec{E}_{\parallel} колеблется в плоскости, образованной лучом и оптической осью кристалла; 2) обыкновенным лучом называется луч, в котором световой

висит от величины ε : $v_{\rm H} = c/\sqrt{\varepsilon}$.

вектор \vec{E}_{\perp} колеблется перпендикулярно этой плоскости.

Оказывается, что скорость распространения обыкновенного луча одинакова по всем направлениям. Для необыкновенного луча скорость вдоль оптической оси совпадает со скоростью обыкновенного луча, но по всем



оптическая

б

кристалл

V_H

ОСЬ

Z∱волновой фронт сфера) оптическая

кристалл

α

ОΠ чи ч

преломленного

BOЛH.

фронт 🗸

обыкнов.

луча

естественный

кристалл

плоский

волн. фронт

преломленного

необыкновенного луча

све



остальным направлениям различна, так как за-

$$v_{\mathrm{H}z} = v_{\mathrm{of}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}} < v_{\mathrm{H}y} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}}, \text{ так как } \varepsilon_z > \varepsilon_y.$$

Для обыкновенного луча выполняется обычный закон преломления света, но для необыкновенного луча этот закон нарушается так как волновой фронт света, испущенного точечным источником необыкновенных лучей в неизотропных кристаллах, не сферичен. оптическая a)

Примеры:

а) Свет распространяется вдоль оптической оси кристалла (рисунок а). Скорость обыкновенного и необыкновенного лучей одинакова, и луч естественного света движется, не разделяясь.

б) Свет распространяется перпендикулярно к оптической оси кристалла; обыкновенный и необыкновенный лучи движутся в одном направлении, но скорость необыкновенного луча больше (или меньше), чем у обыкновенного, и разность хода между ними растет (рисунок б).

в) Свет распространяется под произвольным углом к оптической оси (рисунок в). Плоские волновые фронты преломленных лучей являются оги-

бающими вторичных волн, испущенных точками на поверхности кристалла. Как видно из этого рисунка, для необыкновенного луча нарушен закон преломления.



Поэтому луч естественного света, проходя через кристалл под произвольным углом к оптической оси кристалла, разделится на обыкновенный и необыкновенный, которые дадут двойное изображение предмета.

Часть естественных кристаллов обладает свойством дихроизма: один из лу-

чей (обыкновенный и необыкновенный) в них сильно поглощается. Так, в турмалине (разновидность кварца) обыкновенный луч будет полностью поглощен, пройдя путь в 1 мм. Тогда выходящий из кристалла луч, оставшийся непоглощенным, будет полностью плоскополяризован. Такие кристаллы являются поляризаторами.

На практике эффект Керра используют для создания быстродействующих переключателей или модуляторов света.



Оптически анизотропную одноосную среду можно сделать из изотропной, если сжать ее в одном направлении (в этом направлении будет ориентирована оптическая ось). Это – искусственно созданный эффект анизотропии или явление фотоупругости, открытое в 1815г. Брюстером.

Показатели преломления для обыкновенного n₀ и необыкновенного n_н

луча различны, а их разность $n_{\rm H} - n_0$ пропорциональна *р*, *F*, σ (давлению, силе сжатия, напряжению). Поэтому по прохождению света в среде можно судить о возникающих в среде напряжениях. Такие элементы устанавливают для измерения на-

пряжений в шахтах, мостовых конструкциях и т.п.

Но в жидкостях или газах проще наблюдать эффект Керра – во внешнем электрическом поле напряженностью \vec{E} молекулы среды поляризуются и ориентируются вдоль \vec{E} . В этом направлении возникает искусственная анизотропия (оптическая ось).

Величина разности $n_{\rm H} - n_{\rm o} = KE^2$ пропорциональна квадрату напряженности! Тогда, проходя расстояние *l* в наэлектризованной жидкости, обыкновенный и необыкновенный лучи приобретают разность фаз $\Delta \phi = \frac{2\pi}{\lambda} l(n_{\rm H} - n_{\rm o}) = 2\pi l B E^2$, где $B = K/\lambda$ постоянная Керра разная для разных сред, положительная у большинства сред.



Ячейка Керра – это слой жидкости или дигидрофосфата калия ширины *l*, помещенный между двумя скрещенными под углом 90° поляризаторами. Такая система не пропускает свет. Но если включить перпендикулярное поле \vec{E} , то за время $\tau \sim 10^{-12} \div 10^{-10}$ с молекулы успевают поляризоваться (это время срабатывания ячейки Керра). Оно очень мало, поэтому практически мгновенно устанавливается $n_{\rm H} - n_{\rm o} \neq 0$ и ячейка начинает пропускать свет. Это –оптический затвор практически мгновенно действующий пере-

ключатель света, используемый в быстродействующих ЭВМ. Если менять величину напряженности электрического поля со временем $\vec{E}(t)$, то аналогично за очень малое время τ будет меняться интенсивность прошедшего через ячейку Керра света – происходит модуляция светового пучка.

Поле \vec{E} в ячейке Керра можно создавать другим светом, например – электрическим полем луча лазера, что позволяет одним световым лучом практически мгновенно управлять световым лучом другого лазера, отклонять его, изменять его интенсивность.

Наконец, укажем, что ряд веществ является оптически активными: так называют среды, поворачивающие плоскость поляризации при прохождении через них плоскополяризованной волны. Угол ф поворота плоскости поляризации пропорционален концентрации активного вещества в нём. Пример: сахарный сироп. По углу поворота плоско-

сти поляризации ф определяют концентрацию сахара в растворе. Заметим, что, сахар, произведенный химическим путем (или раствор искусственно сделанного меда), вначале не поворачивает плоскость поляризации, но, постояв некоторое время на открытом воздухе, становится оптически активным. Дело в том, что в сахаре, произведенном химическим путем, имеются в равных количествах как правополяризованные, так и левополяризованные молекулы. Бактерии, живущие в воздухе, используют для своей жизнедеятельности только левополяризованные молекулы, поэтому в сахаре остаются преимущественно правополяризованные, и он становится оптически активным.

3.3. Дисперсия электромагнитных волн

Явление дисперсии в оптике – это зависимость скорости электромагнитных волн в среде или показателя преломления *n* среды от частоты волны v или от её длины волны λ .

Оказывается, что электромагнитные волны с большей длиной волны λ имеют большую скорость. Так красный свет имеет большую скорость, чем синий, и обгоняет его. Реальные электромагнитные сигналы (импульсы) являются набором волн с разными частотами и не сохраняют свою форму, "расплываются" при перемещении в реальной среде.

Причина дисперсии в том, что в молекулах или атомах среды имеются электроны с малой массой *m*, вращающиеся по разным орбитам с разными "собственными" частотами ω₀; в поле атомных ядер. При действии электрического поля электромагнитной волны, направленного, например, вдоль оси у, $E_y = E_0 \cos(\omega t - kx)$, уравнение движения находящегося в атоме электрона, в проекции на ось у имеет вид $m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_{ynp y} - eE_y$,

где $F_{v \pi p v} = -m\omega_{0i}^2 y$ - проекция квазиупругой силы, заставляющей электрон колебаться в поле атомного ядра. Решением

этого уравнения будут смещения электронов
$$y = -\frac{eE_0}{m(\omega_{0i}^2 - \omega^2)} \cos(\omega t - kx)$$
, создающих дипольный момент молекулы

 $p_{\text{мол}} = \sum_{i} (-e) \cdot y$. Умножая на концентрацию молекул среды N, получаем сумму дипольных моментов молекул в еди-

нице объема среды, т.е. вектор поляризованности $P = Np_{MOT} = \sum_{i} \frac{Ne^2 E_0}{m(\omega_{0i}^2 - \omega^2)} \cos(\omega t - kx)$, который должен быть связан

с напряженностью внешнего электрического поля (поля волны) соотношением $P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t - kx)$.

Отсюда находим диэлектрическую проницаемость среды є и её показатель преломления

который зависит от частоты ω проходящей через среду электромагнитной волны или от её длины волны $\lambda = 2\pi v_{\rm 2M}/\omega$.

Как видно из полученной формулы, кроме нормальной дисперсии может наблюдаться аномальная дисперсия, когда показа-









тель преломления среды уменьшается с ростом λ , и n < 1. Это происходит, например, в плазме земной ионосферы, где

много свободных электронов, для которых $\omega_{0i} = 0$ и $n = \sqrt{1 - \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m \omega^2}} < 1$. В плазме и в некоторых других случаях фазовая

скорость электромагнитной волны $v_{3M} = c/n$ превышает скорость света *с* в вакууме!

Никакого противоречия с теорией относительности здесь нет, так как фазовая скорость $v_{3M} = c/n = \omega/k$ - это

скорость, с которой движется волновая поверхность **бесконечной монохроматиче**ской волны. Но реально таких волн электромагнитных волн нет. Они испускаются в виде коротких цугов или <u>волновых пакетов</u>, являющихся набором электромагнитных волн с разными частотами ω . <u>Групповой скоростью</u> \vec{u} называется скорость, с которой передвигается центр такого волнового пакета или электромагнитного импульса (хотя сам волновой пакет может расплываться и менять свою форму из-за наличия дисперсии).

А́Ḗ^{волновой} → û пакет √ √ √ Хэм ∧ Х



Рассмотрим для примера волновой пакет из

д двух волн с близкими частотами ω и $\omega + \Delta \omega$, волновыми числами k и $k + \Delta k$ и одинаковыми амплитудами: $E_1 = E_0 \cos(\omega t - kx)$, $E_2 = E_0 \cos((\omega + \Delta \omega)t - (k + \Delta k)x)$. Складывая их, получаем

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \cos\left(\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x\right)$$

Так как $\Delta \omega \ll \omega$, то первый гармонический сомножитель изменяется очень медленно по сравнению со вторым, и его можно считать амплитудой волнового пакета. Точки, в которых амплитуда максимальна и равна $2E_0$, удовлетворяют ус-

ловию $\frac{\Delta \omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x = 0$ - это центр волнового пакета, образованного двумя складывающимися волнами. Скорость его пе-

ремещения $u = \frac{x}{t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$. Аналогичная формула для групповой скорости (скорости центра любого волнового пакета) по-

лучается при сложении большого числа волн с близкими частотами: $u = d\omega/dk$.

Покажем, что величина групповой скорости \vec{u} не может превышать величину скорости света в вакууме *c*, т.е. передача информации со сверхсветовой скоростью невозможна.

Подставим в выражение $u = d\omega/dk$ значения $\omega = kv_{2M}$ и $k = 2\pi/\lambda$. Получим

$$u = \frac{d(kv_{3M})}{dk} = v_{3M} + k \frac{dv_{3M}}{dk} = v_{3M} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dv_{3M}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}.$$

Ho $\frac{d\lambda}{dk} = \left(\frac{dk}{d\lambda}\right)^{-1} = \left(\frac{d(2\pi/\lambda)}{d\lambda}\right)^{-1} = \left(-\frac{2\pi}{\lambda^2}\right)^{-1} = -\frac{\lambda^2}{2\pi}.$ Поэтому $u = v_{3M} - \lambda \frac{dv_{3M}}{d\lambda}$ - эта формула связывает групповую

и фазовую скорость волны. Из неё следует, что в среде с нормальной дисперсией, в которой $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ или

 $\frac{d\mathbf{v}_{_{\rm ЭМ}}}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{c}{n}\right) > 0$, групповая скорость всегда меньше фазовой: $u < \mathbf{v}_{_{\rm ЭM}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{n} < c$. Передача электромагнитных

сигналов (информации) должна происходить со скоростью, меньшей скорости света.

4. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

4.1. Характеристики теплового излучения. Энергетическая светимость, излучательная и поглощательная способность

Любое нагретое тело или участок среды испускает электромагнитные волны. Излучают эти волны движущиеся молекулы и атомы среды за счет своей внутренней (тепловой) энергии. Результатом будет передача энергии в виде электромагнитного излучения от более нагретых к менее нагретым участкам среды и установление **теплового равновесия**, выравнивание температур во всех точках среды. Подобное излучение называют <u>тепловым</u>. Его спектр содержит все возможные длины электромагнитных волн 0 < λ < ∞.

Пример: лампа накаливания, в которой между спиралью накаливания 1 и стеклянной оболочкой 2 находится вакуум. Единственным способом передачи тепла от спирали 1 к оболочке 2 будет тепловое излучение. Это излучение будет поглощаться атомами оболочки 2, которая нагревается и, в свою очередь, испускает тепловое излучение. Нагретая спираль 1 не только излучает, но и поглощает тепловое излучение, приходящее извне от оболочки 2, т.е. тепловое излучение испускается при любой температуре нагретого тела, даже если она меньше температуры окружающей среды (у оболочки на рисунке температура T_2



меньше, чем температура T_1 раскаленной спирали). Если испущенное участком среды тепловое излучение больше, чем поглощенное, то энергия этого участка и его температура будут уменьшаться. После выключения лампочки обмен тепловым излучением приводит к выравниванию температур спирали и окружающей замкнутой оболочки: $T_1 = T_2$. При установившемся равновесии температур излучаемая энергия равна поглощаемой, и нагретое тело окружено равновесным тепловым излучением в виде непрерывно излучаемых и поглощаемых электромагнитных волн. Из всех видов излучения только тепловое может быть равновесным.

Хотя тепловое излучение имеет все длины волн λ , но испускание и поглощение волн с разными λ происходит с разной интенсивностью. dE_{1 nan} Λ dF_{2 nan} Пусть на единичную поверхность нагретого тела падает извне тепловое излучение, в кото-

 $\begin{array}{c} d\mathsf{E}_{\lambda \, \mathsf{nad}} & \mathsf{A} d\mathsf{E}_{\lambda \, \mathsf{orp}} \\ & & \mathsf{V} \\ \hline \\ & & \mathsf{Teno} & \mathsf{A} d\mathsf{E}_{\lambda \, \mathsf{norn}} \end{array}$

ром электромагнитные волны с длинами от λ до $\lambda + d\lambda$ несут энергию $dE_{\lambda \, \text{пад}}$. Часть этих волн с энергией $dE_{\lambda \, \text{погл}}$ поглощается телом, а часть с энергией $dE_{\lambda \, \text{отр}} = dE_{\lambda \, \text{пад}} - dE_{\lambda \, \text{погл}}$ – отражается. Отношение поглощенной энергии к падающе<u>й для теплового излучения с</u> длинами волн от λ до

 $\lambda + d\lambda$ называется поглощательной способностью нагретого тела $a_{\lambda}(\lambda, T) = dE_{\lambda \Pi 0 \Gamma \pi}/dE_{\lambda \Pi a \pi}$. Эта величина зависит от длины волны λ и от температуры *T* равновесного теплового излучения.

В свою очередь, нагретое тело излучает, и с единицы его поверхности по всем направлениям за единицу времени испускаются электромагнитные волны с длиной от λ до $\lambda + d\lambda$ уносят энергию $d\dot{E}_{\lambda \mu_{3,1}}$. Величина $r_{\lambda}(\lambda,T) = d\dot{E}_{\lambda \mu_{3,1}}/d\lambda$ называется излучательной способностью нагретого тела. Эта величина также является функцией λ и *T*.

Проинтегрировав излучательную способность по всем длинам волн, получим энергетическую светимость нагре-

того тела

$$R(T) = \int_{0}^{\infty} r_{\lambda}(\lambda, T) d\lambda$$

т.е. энергию, уносимую тепловым излучением с единицы поверхности тела за единицу времени.

Можно определить излучательную способность как функцию частоты $\omega = 2\pi c/\lambda$, где *c* – скорость света:

 $r_{\omega}(\omega,T) = d\dot{E}_{\omega_{\rm W37}}/d\omega$, где $d\dot{E}_{\omega_{\rm W37}}$ – энергия, уносимая с единицы поверхности за единицу времени волнами с частотой

от ω до $\omega + d\omega$, тогда энергетическая светимость

$$R(T) = \int_{0}^{\infty} r_{\omega}(\omega, T) d\omega.$$

4.2. Закон Стефана-Больцмана и закон смещения Вина для теплового излучения абсолютно черного тела. Коэффициент поглощения

Когда система тел и тепловое излучение приходят в тепловое равновесие, т.е. температура T всех излучающих и поглощающих тел одинакова, то отношение излучательной и поглощательной способности не зависит от формы и строения нагретого тела, а является универсальной функцией температуры и длины волны (или частоты), одинаковой для всех

$$\frac{\left|\frac{r_{\lambda}(\lambda,T)}{a_{\lambda}(\lambda,T)}\right|_{\text{TE,IO}\ 1} = \frac{r_{\lambda}(\lambda,T)}{a_{\lambda}(\lambda,T)}\Big|_{\text{TE,IO}\ 2} = \frac{r_{\lambda}(\lambda,T)}{a_{\lambda}(\lambda,T)}\Big|_{\text{TE,IO}\ 3} = \ldots = f(\lambda,T).$$

Это – закон излучения Кирхгофа, основной закон теплового излучения.

Действительно, если в системе из двух нагретых тел $(r_{\lambda}/a_{\lambda})_1 > (r_{\lambda}/a_{\lambda})_2$, то по отношению ко второму телу первое будет излучать больше энергии, чем поглощать. В этом случае в замкнутой системе тело 1 начнет постепенно охлаждаться, а тело 2 – нагреваться, что противоречит условию теплового равновесия. Поэтому $(r_{\lambda}/a_{\lambda})_1 = (r_{\lambda}/a_{\lambda})_2$. Этот же аргумент можно использовать, добавляя к системе новые тела.

Для того, чтобы определить универсальную функцию $f(\lambda, T)$ в этом законе, Кирхгоф ввел понятие <u>абсолютно</u> <u>черного тела</u> – эталонной идеальной непрозрачной среды, которая при любой температуре полностью поглощает все падающее на него электромагнитное излучение с любой длиной волны, т.е. имеет поглощательную способность $\boxed{a_{\lambda q}(\lambda, T) = 1}$ (индексом "ч" будем обозначать величины, относящиеся к абсолютно черному телу).

Тогда универсальной функцией в законе Кирхгофа будет излучательная способность эталонного абсолютно черного тела: $f(\lambda, T) = r_{\lambda q}(\lambda, T)$. В природе абсолютно черных тел не существует, но некоторые реальные среды по своим свойствам практически совпадают с ними. Например – излучающая внешняя поверхность звезд (Солнца); сажа (для которой $a_{\lambda}(\lambda, T) = 0.94 \div 0.96$ при температурах 370 – 470 K).



Хорошей моделью абсолютно черного тела является замкнутая полость, в которой проделано **небольшое** отверстие. Попавшее в отверстие излучение испытывает множественные отражения на стенках полости. Поглощательная способность стенок отлична от нуля (хотя и не равна 1). Поэтому вошедший луч постепенно поглощается **практически полностью**, так как размер входного отверстия мал, и вероятность попасть в него при отражении также мала. Стенки, нагреваясь, излучают, и в полости устанавливается равновесное тепловое излучение, равномерно заполняющее полость. Только очень

небольшая часть этого равновесного теплового излучения, имеющего температуру полости, попадает в пределы отверстия и

выходит наружу. Спектр вышедшего равновесного излучения отличен от спектра излучения, входящего в систему, и определяется температурой стенок полости. Обратите внимание на открытые окна зданий. Днем они кажутся черными, хотя внутри комнат достаточно светло. Дело в том, что максимум излучения, выходящего из окон-отверстий, приходится уже на инфракрасную область спектра, не видимую глазом. По той же причине ткань с порами и складками имеет более насыщенный цвет, чем окрашенная тем же красителем гладкая шелковая ткань, лучше отражающая солнечный свет.



Пример: поместим предмет внутрь ящика, стенки которого покрыты слоем сажи. Сажа, как и абсолютно черное тело, поглощает практически все тепловое излучение, постоянно испускаемое предметом. Однако холодильником такой ящик не будет. Абсолютно черное тело не только поглощает, но и излучает. При определенной температуре *T* установится равновесие. Слой сажи, как и предмет, будут излучать столько же энергии в виде теплового излучения, сколько поглощать. $\{r_{3,u}(\lambda, T)\}$

Заметим, что видимый цвет абсолютного черного тела может не быть черным (сажу можно раскалить докрасна). Это связано с тем, что излучательная способность такого тела зависит от λ, и при некоторой длине волны имеет максимум. Такую длину волны $\lambda = \lambda_m$



можно назвать <u>наиболее вероятной длиной волны теплового излучения.</u> На эту длину волны прихо- О́ дится максимум в спектре равновесного излучения абсолютно черного тела.

Оказывается, что величина λ_m связана с температурой нагретого тела соотношением

$$\lambda_m \cdot T = b = \text{const},$$

которое носит название <u>закона смещения Вина.</u> Здесь *b* = 2,898 · 10⁻³ м·К – <u>постоянная Вина.</u>

При комнатных температурах величина λ_m попадает в инфракрасную область, и глаз не видит равновесного теплового излучения. Но при увеличении температуры *T* максимум излучения должен смещаться в область более коротких длин волн, и глаз видит, что поверхность раскаленного тела приобретает сначала темно-вишневую, а потом красную и желтую окраску. При ~6000 К абсолютно черное тело имеет цвет солнечной поверхности.

Площадь под кривой на рисунке зависимости $r_{\lambda y}(\lambda, T)$ от λ является энергетической светимостью абсолютно

черного тела, зависящей от температуры. Эта зависимость носит название закона Стефана-Больцмана:

Энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его температуры:

$$R_{\mathbf{q}}(T) = \int_{0}^{\infty} r_{\lambda \mathbf{q}}(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^{4},$$

где постоянная $\sigma = 5,67032 \cdot 10^{-8} \text{ Br/}(\text{м}^2 \cdot K^4)$ называется <u>постоянной Стефана-Больцмана</u>.

На рисунке справа показано, что происходит при увеличении температуры с излучательной способностью находящегося в тепловом равновесии абсолютно черного тела. Заметим также, что для аналогичного графика зависимости излучательной способности $r_{\omega q}(\omega, T)$ от частоты ω закон смещения Вина примет вид $\omega_m/T = \text{const}$, т.е. с ростом *T* наиболее вероятная частота излучения ω_m увеличивается.

Энергетическая светимость (и излучательная способность) реальных сред меньше, чем у абсолютно черного тела

при той же температуре. Она определяется выражением

$$R(T) = \int_{0}^{\infty} a_{\lambda}(\lambda, T) r_{\lambda \mathbf{q}}(\lambda, T) d\lambda < \sigma T^{4}.$$

Поглощательная способность $a_{\lambda}(\lambda, T) < 1$ – это функция переменных λ и *T*, различная для разных сред. У неоднородных сред в определенных интервалах *T* и λ поглощательная способность практически постоянна. Такие среды называются <u>серыми телами</u> (например, каменный уголь, для которого $a_{\lambda} = 0,8$ при 400 < *T* < 900 *K*, и т.п.).

В любом случае энергетическая светимость реальной среды может быть записана в виде

A(T) < 1 - <u>коэффициент поглощения среды</u>, зависящий от температуры сложным образом и различный для разных сред.Для серого тела его можно считать постоянным.

Примеры: 1) вольфрамовый проводок (коэффициент поглощения A = 0,3) включенной лампочки мощностью P = 100 Вт имеет радиус r = 0,05 мм и длину l = 0,5 м (в развернутом состоянии). В стационарном состоянии вся выделяющаяся при протекании тока джоулева мощность должна излучаться с боковой поверхности проводка $S = 2\pi r l$. Поэтому с единицы поверхности за единицу времени испускается, согласно закону Стефана-Больцмана для серого тела, энергия

$$P/S = R = A \, \sigma T^4$$
, откуда температура проводка $T = \sqrt[4]{P/(2\pi r \, l \, A\sigma)} = 2470 \, K.$



2) Будем считать Землю серым телом с коэффициентом поглощения *A*, со средней температурой $T_0 \approx 300 \,\mathrm{K}$ и с площадью поверхности $S = 4\pi r^2$. Солнечная энергия, поглощаемая Землей ежесекундно, должна быть равна энергии (мощности), испускаемой Землей в виде теплового излучения : $P_0 = R_0 \cdot S = A\sigma T_0^4 S$.



 $R(T) = A(T)\sigma T^4$

<u>2 e 2</u> \$ \$

-øUø

Такая планетарная катастрофа, как попадание в Землю крупного астероида или массовый взрыв ядерных боеголовок в разных городах, вызовет выделение большой тепловой энергии и нагрев до высоких температур, при которых начинают гореть (окисляться) бетон, почва и т.п. Все это сопровождается появлением мощных потоков (например, "гриб" атомного взрыва), выносящих микронные частички сажи на очень большую высоту, в тропосферу, где падение температуры по мере удаления от поверхности Земли сменяется ее ростом. Конденсации влаги в тропосфере нет и облака сажи способны "висеть" в ней годами.

Как абсолютно черное тело, сажа поглощает солнечное излучение, нагревается и испускает тепловое излучение **в** обе стороны (правая часть рисунка). В результате на Землю попадает только половина излучения, приходящего от Солнца, и устанавливается новая средняя температура Земли: $P = P_0/2 = A\sigma T^4 S$. Сравнивая два последних равенства, видим, что средняя температура Земли уменьшится на $\Delta T = T_0 - T_0/\sqrt[4]{2} \approx 50 \text{ K}!$ Такую катастрофу называют <u>ядерной зимой</u> и длится она до тех пор, пока не рассеются облака сажи в атмосфере.

В приведенном примере не учтено много факторов. Так, детальный расчет показывает, что в центре континента (в районе Тулы) температура упадет на $\Delta T \approx 45 \,\mathrm{K}$, а падение температуры океанов не превысит 1 К (вода имеет высокую теплоемкость и является хорошим аккумулятором тепла). Большой перепад температур вызовет постоянные ураганы в океане и выпадение километровых сугробов на побережье.

Заметим еще один фактор – сажа не является абсолютно черным телом в длинноволновой части спектра. Она хорошо поглощает коротковолновое излучение, приходящее от Солнца, но пропускает инфракрасное излучение Земли, что позволяет использовать формулу закона Стефана-Больцмана. С другой стороны, углекислый газ наоборот хорошо пропускает коротковолновое, но поглощает инфракрасное излучение. Поэтому повышение концентрации CO₂ в атмосфере приведет к задержке и возвращению на Землю все большей доли испущенного ею теплового излучения и постепенному разогреванию Земли, т.е. возникновению противоположного парникового эффекта.

4.3. Неприменимость законов классической физики. Гипотеза Планка. Фотон. Энергия и импульс фотона

Уравнения электромагнетизма позволяют вычислить излучательную способность абсолютно черного (или серого) тела. Зависимость излучательной способности от частоты ω согласно

классической теории Максвелла имеет вид $\left(r_{\omega \Psi}\right)_{\text{класс}} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} k_{\text{B}} T$. где T – температура среды (в



К), $k_{\rm b} = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К - постоянная Больцмана.

Это – <u>формула Рэлея-Джинса</u>. Она хорошо соответствует реальному излучению в области малых частот ω (или больших длин волн λ). Но согласно этой формуле практически вся энергия нагретого тела должна быть немедленно испущена в виде излучения с очень большой частотой и малой длиной волны. Этот результат назвали ультрафиолетовой катастрофой Рэлея-Джинса.

Вывод: законы классической физики неприменимы к описанию теплового излучения.

Использовавшиеся классические законы не являются истинными. Они являются только **приближением** истинных квантовых законов природы, справедливыми лишь при определенных условиях для описания макроскопических тел.

Устранил указанное противоречие Макс Планк. Классическая теория предполагает испускание и поглощение электромагнитных волн с **любой** энергией и частотой ω . Планк предположил, что электромагнитное излучение может испускаться нагретыми телами только отдельными порциями – <u>квантами</u>.

<u>Квант электромагнитное излучение может испускаться напретыми телами только отдельными порциями – квантами,</u> Квант электромагнитного излучения позже назвали <u>фотоном</u> (в латыни слово "quanta" означает "порция"). Энергия испущенного фотона или <u>квант энергии</u> имеет величину $E_{\phi} = \hbar \omega$, где $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – <u>постоянная Планка.</u> Часто энергию фотона записывают через обычную частоту $\nu = \omega/2\pi$. Тогда $E_{\phi} = h\nu$, где $h = 2\pi\hbar = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж · с –

также постоянная Планка.

Фотон не может быть испущен частями, а только целиком, как частица с определенной энергией. Электромагнитное излучение обладает не только волновыми свойствами, но и свойствами частиц. Испускание энергии нагретыми телами происходит не непрерывно, а отдельными порциями – квантами.

Так как масса покоя электромагнитного поля, как и масса покоя фотона равна нулю, то из связи энергии и импульса релятивистской частицы $(E/c)^2 - p^2 = m^2 c^2$ находим величину <u>импульса фотона</u>: $p_{\Phi} = \frac{E_{\Phi}}{c} = \frac{\hbar \omega}{c} = \frac{2\pi \hbar}{\lambda}$.

Фотоны, как и любые частицы с нулевой массой покоя, могут двигаться только со скоростью света.

25.4. Формула Планка для теплового излучения. Кривая излучательной способности

Согласно классической теории средняя энергия электромагнитной волны (цуга электромагнитной волны), испущенной атомом, равна $\langle E \rangle = k_{\rm b}T$. Можно показать, что согласно гипотезе Планка средняя энергия фотона, испускаемого ато-

мом,
$$\left| \left\langle E_{\phi} \right\rangle = \hbar \omega / \left(\exp \left(\frac{\hbar \omega}{k_{\rm b} T} \right) - 1 \right) \right|$$
. Этот результат совпадает с классическим выражением $\left\langle E \right\rangle = k_{\rm b} T$ только в области

малых частот, когда $\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_{\rm E}T}\right) \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{k_{\rm E}T} + \dots$ Если заменить в формуле Рэлея-Джинса классическое выражение $k_{\rm E}T$ на

 $\langle E_{
m d}
angle$, то получим правильную зависимость излучательной способности абсолютно черного тела от частоты ω :

$$r_{\omega \Psi}(\omega,T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega/k_B T) - 1}$$

Это – формула Планка, описывающая правильный график кривой излучательной способности абсолютно черного тела, совпадающий с результатами эксперимента.

Проинтегрировав это выражение по всем частотам и учитывая, что $\int_{0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$, приходим к полученному из

опытов закону Стефана-Больцмана $R_{\rm q}(T) = \int_{0}^{\infty} r_{\omega \rm q}(\omega, T) d\omega = \sigma T^4$, где постоянная Стефана-Больцмана $\sigma = \frac{\pi^2 k_{\rm B}^4}{60 c^2 \hbar^3}$.

Заменой переменной $\lambda = 2\pi c/\omega$, под знаком интеграла $R_{\rm q}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{\lambda \rm q}(\lambda, T) d\lambda$ можно найти зависимость излуча-

тельной способности абсолютно черного тела от длины волны: $r_{\lambda \, \mathrm{v}}(\lambda, T) = \frac{4\pi^2 c^2 \, \hbar}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(2\pi c \, \hbar/\lambda k_{\mathrm{B}} T) - 1}$. Условие максимума

этой функции, $\frac{dr_{\lambda \, \mathrm{q}}}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_m} = 0$, приводит к уравнению $(5\lambda_m T - a)\exp(a/\lambda_m T) = 5\lambda_m T$, где $a = 2\pi c \, \hbar/k_{\mathrm{F}}$. Его решение

 $\lambda_m T = 0,2014 \cdot a = b$ известно как закон смещения Вина.

5. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МИКРОЧАСТИЦ

5.1. Внешний и внутренний фотоэффект. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Работа выхода электрона из металла и красная граница фотоэффекта

Явление фотоэффекта также показывает несоответствие результатов эксперимента и классических законов электромагнетизма. Суть фотоэффекта (опыт Столетова) приведена на следующем рисунке: монохроматическое электромагнитное излучение с частотой ш падает на металл и выбивает из него электроны, летящие к аноду и создающие в цепи ток, называемый фототоком.

Выбивание электронов из металла падающим светом или другим электромагнитным излу-



сической физике вектор Пойнти

энергия ограничена величиной

чением называется внешним фотоэффектом. Оказывается, что фотоэффект прекращается при некоторой частоте падающей волны ω_{kp} , называемой <u>красной</u> U₃=0 <u>границей фотоэффекта</u>. По классическим представлениям это не должно происходить: волна с любой частотой $\omega\!<\!\omega_{kp}$, поглощаясь металлом, будет передавать

ему энергию. Постепенно эта накапливаемая энергия становится значительной, сообщается электронам, и последние должны покидать металл, что не наблюдается.

Кроме того, при возрастании прямого напряжения U между катодом и анодом в цепи величина фототока стремится к постоянному значению, называемому током насыщения I_{нас}. Величина тока насыщения, т.е. количество выбиваемых электронов, пропорциональна интенсивности падающег



нальна интенсивности падающего излучения или вектору Поинтинга:
$$T_{\text{нас}} \sim J_{\text{w}}$$
. В клас-
сической физике вектор Пойнтинга зависит от амплитуды электромагнитного поля и не
зависит от его частоты, хотя из приведенного графика видна экспериментальная зависимость фототока от частоты ω .
При некотором значении поданного на анод задерживающего напряжения U_3 обратного знака фототок прекращается. Так как
кинетическая энергия вылетающих из катода электронов идет на преодоление задерживающей разности потенциалов, то эта
энергия **ограничена величиной** $mv^2/2 = e|U_3|$, где *m*, *e* – величина массы и заряда электрона. Но если бы падающая

волна передавала энергию непрерывно, то энергия могла бы достигать большой величины, и можно было ожидать вылета электронов с любой, какой угодно большой энергией.

Все эти противоречия устранил А.Эйнштейн, предположив, что

электромагнитное излучение не только испускается, но и поглощается отдельными квантами – фотонами.

Электрон проводимости, свободно движущийся в металле, поглощает фотон с энергией ħω. Часть этой энергии идет на преодоление задерживающей разности потенциалов на границе металла. Минимальная энергия, которую надо сообщить электрону, чтобы он покинул металл, называется работой выхода электрона из металла А_{вых} (величина работы выхода различна для разных металлов). Остаток энергии будет кинетической энергией электрона, вылетевшего из металла.

Таким образом, закон сохранения энергии запишется в виде уравнения Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$\hbar\omega = A_{\rm BMX} + \frac{mv^2}{2}$$

которое правильно описывает все приведенные особенности фотоэффекта:

1) При уменьшении частоты или увеличении длины волны падающего излучения уменьшается скорость v вылетевшего электрона. Когда энергия падающего фотона сравняется с работой выхода, то v = 0 и

$$\omega = \omega_{\rm kp} = A_{\rm Bbix}/\hbar; \qquad \lambda = \lambda_{\rm kp} = \frac{2\pi c}{\omega_{\rm kp}} = \frac{2\pi c\hbar}{A_{\rm Bbix}}$$

Если энергия фотона с большей длиной волны (смещенной в "красную" сторону спектра) меньше работы выхода, ее недостаточно для того, чтобы электрон покинул металл, и фотоэффект не происходит. Поэтому записанное условие называется <u>красной границей фотоэффекта</u>. У большинства металлов $A_{\rm Bbix} = 2 \div 6$ эВ, $\lambda_{\rm kp} = 600 \div 200$ нм, и красная граница фотоэффекта может лежать за пределами видимого спектра. Фотоэффект хорошо вызывается ультрафиолетовым и рентгеновским излучением. Измеряя величину задерживающего потенциала U_3 и зная частоту ω падающего излучения, можно определить работу выхода электрона из данного проводника: $\overline{A_{\rm Bbix}} = \hbar \omega - eU_3$.

е металл полупроводник ћω, - e v диэлектрик

$$\hbar\omega = E_{\rm H} + m {\rm v}^2/2$$

должна стоять <u>энергия ионизации</u> E_и – наименьшая энергия, которую надо сообщить электрону

для его вырывания из атома или иона решетки.

Вывод: фотоэффект показывает, что электромагнитное излучение способно вести себя как частица – фотон. При поглощении, испускании или взаимодействии фотона с любыми частицами можно использовать те же законы сохранения энергии и импульса, что и при взаимодействии частиц.

5.2. Эффект Комптона

Еще одно явление, доказывающее корпускулярную природу электромагнитного излучения – <u>эффект Комптона</u>, т.е. эффект изменения частоты электромагнитного излучения при рассеянии, который не может быть объяснен в рамках классической физики. Фотон с энергией $E_{\phi} = \hbar \omega$ и с импульсом \vec{p}_{ϕ} рассеивается на покоящейся частице (например, на

электроне) с массой *m*, т.е. улетает под углом θ к направлению первоначального движения. При этом энергия рассеянно-

го фотона меняется и будет равна $E'_{\phi} = \hbar \omega'$. Меняется и энергия $E_e = mc^2$ первоначально поко-

ившегося электрона, улетающего с импульсом
$$\vec{p}_e$$
'.

Новые энергии и импульсы частиц можно найти из законов сохранения энергии и импульса: $E_{\rm e} + E_{\rm d} = E_{\rm e}^{'} + E_{\rm d}^{'};$ $\vec{p}_{\rm d}^{'} = \vec{p}_{\rm e}^{'} + \vec{p}_{\rm d}^{'}.$

$$\vec{p}_{\phi} = \vec{p}_{e} + \vec{p}_{\phi}.$$

Решая систему этих уравнений и учитывая связь частоты и длины волны, $\lambda = 2\pi c/\omega$, $\lambda' = 2\pi c/\omega'$, приходим к формуле Комптона: $\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \Lambda (1 - \cos \theta)$,

где величина $\Lambda = 2\pi\hbar/mc = h/mc$ называется комптоновской длиной волны частицы с массой *m*.

Эта формула выражает суть <u>эффекта Комптона</u>: при рассеянии на угол θ длина волны фотона возрастает на величину Δλ. Соответственно, скачком (в момент столкновения) уменьшается энергия рассеянного фотона.

Эффект Комптона происходит на любых частицах, как заряженных, так и незаряженных. Наиболее заметен этот эффект при рассеянии на самых легких частицах – электронах, имеющих наибольшую комптоновскую длину волны $\Lambda_e = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м. Но даже в этом случае изменение $\Delta\lambda$ настолько мало, что не может быть заметно невооруженным глазом как изменение цвета рассеянного излучения.

Эффект Комптона экспериментально подтверждает квантовую природу электромагнитного излучения. К другим наблюдениям, указывающим на квантовую природу, кроме фотоэффекта и эффекта Комптона, можно отнести процесс рождения электрон – позитронных пар.



При столкновении частицы и античастицы (например, электрона e^- и позитрона e^+ с одинаковыми массами и равными по величине зарядами), происходит процесс <u>аннигиляции</u> – превращение всей

m e энергии частиц, включая энергию покоя $2mc^2$, в энергию электромагнитного излучения, т.е. превращение частиц в фотоны. Один фотон при этом образоваться не может согласно уравнениям законов сохранения энер-

гии и импульса. Обратный процесс превращения частицы-фотона в пару e^-e^+ называется процессом рождения <u>электрон-позитронной пары</u>. Однако для одиночного фотона такое превращение запрещено теми же самыми законами сохранения. Как и фотоэффект, процесс рождения пары идет только при одновременном взаимодействии образующихся частиц с другим объектом, например, с полем атома.



Опыт показывает, что если направить жесткое электромагнитное излучение (гамма-излучение) с высокой частотой $\omega \ge 2mc^2/\hbar = 1,55 \cdot 10^{21} c^{-1}$ на любую среду, состоящую из атомов, то в ней немедленно начинают возникать электрон - позитронные пары.

5.3. Гипотеза де Бройля. Волна де Бройля

В 1924 г. Луи де Бройль опубликовал парадоксальную гипотезу: если электромагнитное излучение с длиной волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ должно проявлять свойства частицы-фотона с энергией $E = \hbar\omega = 2\pi\hbar/\lambda$ и импульсом $p = E/c = 2\pi\hbar/\lambda$, то и материальные частицы с энергией E и импульсом \vec{p} должны обладать свойствами волны с частотой $\omega_{\rm b}$ и длиной волны $\lambda_{\rm b}$, где $\omega_{\rm b} = E/\hbar; \ \lambda_{\rm b} = 2\pi\hbar/p$. Такая волна называется волной де Бройля. В системе СИ энергия даже быстролетящей микрочастицы очень мала, поэтому такую энергию принято для удобства вычислять в электрон-вольтах $1 \Rightarrow B = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Дж; 1 Мэв= 10^6 эВ.

Тогда кинетическая энергия самой легкой микрочастицы (электрона) с длиной волны де Бройля

$$\lambda_{\rm b} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv} \ge 10^{-10} \,\mathrm{M}$$
 будет равна $mv^2/2 = 2\pi^2\hbar^2/m\lambda_{\rm b}^2 \le 150 \,\mathrm{sB}$.

Парадоксальность предположения де Бройля заключается в том, что волна, падая на две щели-отверстия, проходит через обе щели одновременно и создает на экране интерференционную или дифракционную картины полос или пятен различной освещенности. Электрон не может разделиться, пройти одновременно через обе щели и тем самым создать в точке Р экрана две сходящиеся когерентные волны. Это противоречит классическим представлениям. Тем не менее, эксперименты с пучками микрочастиц подтвердили гипотезу де Бройля.



26.4. Опыты по дифракции микрочастиц



В <u>опытах Дэвиссона и Дже́рмера</u> (1927 г.) узкий пучок электронов с кинетической энергией $E \sim 100$ эВ падал на монокристалл никеля и рассеивался на атомах поверхностного слоя под разными углами θ . Длина волны де Бройля таких электронов была сравнима с межатомным расстоянием $d \sim 10^{-10}$ м. Детектор Д (гальванометр) измерил четкие максимумы тока под углами $\theta_{\rm K}$, удовлетворяющими условию интерференционного максимума $\Delta = d \sin \theta_{\rm K} = m \lambda_{\rm E}$, m = 1, 2, 3, для вычисленной длины волны де Бройля (рисунок слева).

В том же 1927 г. Дж. Томсон и независимо П. Тартаковский наблюдали дифракцию электронов при прохождении через тонкую металличе-

скую фольгу. Такая фольга является поликристаллом, и на фотопластинке при попадании электронов оказываются засвеченными узкие кольца, аналогичные дифракционной картине для рентгеновских лучей. Чтобы убедиться в этом, за фольгой создавалось магнитное поле. Оно не действует на рентгеновские лучи, но отклоняет заряженные электроны. Картина колец на фотопластинке смещалась при включении поля, т.е. действительно была образована рассеянными электронами.



Электроны в тысячи раз сильнее взаимодействуют с атомами вещества и рассеиваются, чем фотоны рентгеновского излучения. Это позволяет получать дифракционную картину в

рассмотренном опыте при очень слабых электронных пучках. Чтобы убедиться, что дифракция не вызвана взаимодействием электронов между собой, Биберман, Сушкин и Фабрикант (1949 г.) использовали настолько слабый источник электронов, что электроны падали и проходили через фольгу по одному. Наблюдаемая дифракционная картина при этом не изменилась, откуда следует вывод:

волновыми свойствами обладает каждая микрочастица, а не только их совокупность.

Аналогичные дифракционные картины были получены при рассеянии нейтронных, атомных, молекулярных пучков, т.е. волновые свойства, в соответствии с гипотезой де Бройля, присущи всем микрочастицам.

5.5. Корпускулярно-волновой дуализм

Наличие у микрочастицы (или у электромагнитного излучения) сразу двух свойств – частицы (фотона) и волны называется корпускулярно – волновым дуализмом. С точки зрения классической физики эти свойства несовместимы. Невозможно одной частице – электрону разделиться на два когерентных электрона, взаимодействовать одновременно с соседними атомами и создать интерференционную картину при сложении. Тем не менее, опыт показывает наличие волновых и корпускулярных свойств одновременно. Поэтому следует отказаться от представлений классической физики и предложить совсем новый способ описания микрочастиц и фотонов, допускающий корпускулярно – волновой дуализм. Такой способ называется квантовой физикой.

Нельзя говорить, что в одних условиях (опытах) электрон является частицей, а в других – волной. Он одновременно обладает и теми и другими свойствами (и частица, и волна). Но в одних условиях оказываются более заметными волновые свойства, а в других – корпускулярные.

Например, проявление корпускулярных свойств электромагнитного излучения усиливается при возрастании частоты ω . Жесткое γ - излучение ($\omega \ge 10^{20} \text{ c}^{-1}$) ведет себя практически как поток частиц-фотонов. Радиоволны ($\omega \le 10^{12} \text{ c}^{-1}$) корпускулярные свойства практически не проявляются. Свет или рентгеновское излучение ($10^{15} \le \omega \le 10^{19} \text{ c}^{-1}$) в одних условиях проявляют волновые свойства (интерференция, θ_1

дифракция), а в других – корпускулярные (фотоэффект, эффект Комптона).

6. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ АТОМА

6.1. Планетарная модель атома. Постулат Бора. Боровские электронные орбиты в одноэлектронном атоме. Спектр энергии одноэлектронного атома



В <u>опытах Резерфорда</u> (1911 г.) узкий пучок α -частиц (ядер гелия) с положительным зарядом, равным удвоенному заряду электрона q=+2e, направлялся на металлическую пластинку (фольгу). Оказалось, что рассеяние происходит на очень малых объектах размером ~ 10^{-15} м, размеры которых много меньше размеров атомов ~ 10^{-10} м. Кроме того, эти объекты обладают положительным электрическим зарядом Q = +Ze, пропорциональным порядковому номеру Z в таблице Менделеева химического элемента, из которого изготавливалась фольга.

Это позволило Резерфорду предложить <u>планетарную модель</u> <u>атома</u>: его центр занимает очень маленькое атомное ядро с положительным зарядом +*Ze* и размером ~ 10^{-15} м, вокруг которого вращаются по орбитам отрицательно заряженные электроны, занимающие практически весь объем электронейтрального атома с поперечным размером ~ 10^{-10} м. Рассеяние α – частиц происходило на массивных ядрах атомов.



Планетарная модель атома противоречит классической теории электромагнетизма: вращающийся вокруг ядра электрон движется с ускорением и, следовательно, должен излучать электромагнитные волны. Расчет с помощью формул классической физики показывает, что электрон потеряет энергию на излучение и упадет на ядро за ничтожное время ≤10⁻¹¹ с !

По законам классической физики атомы существовать не могут.

Чтобы объяснить устойчивость атомов и наблюдаемый на опыте спектр их излучения, Н.Бору пришлось в 1913 г. ввести предположения, не совместимые с представлениями классической физики. Они известны как постулаты Бора.

1-й постулат Бора: атомы могут находиться только в отдельных стационарных состояниях с разрешенными энергиями $E_1, E_2, E_3, ...,$ не излучая при этом.

2-й постулат Бора: излучение происходит только при переходе атома из одного стационарного состояния с энергией E_m в другое стационарное состояние с меньшей энергией E_n . Такой переход происходит скачком и сопровождается испусканием фотона с энергией $\hbar \omega = E_m - E_n$

Разрешенным значениям энергии соответствуют отдельные разрешенные орбиты электронов в планетарной модели атома. Их существование можно объяснить с помощью волновых свойств электрона. В замкнутом пространстве (резонаторе) электромагнитное излучение находится в устойчивом состоянии в виде стоячих волн. Поэтому можно ожидать устойчивого состояния "стоячей" волны де Бройля электрона в атоме, когда вдоль орбиты укладывается целое число длин волн де Бройля: $2\pi r_n = n\lambda_{\rm F}, \quad n = 1, 2, 3, ...$

Отсюда следует правило квантования Бора, определяющее радиусы разрешенных электронных орбит:

$$L_n = m v_n r_n = n\hbar, n = 1, 2, 3, ...$$

Здесь *m* масса электрона, v_n – его скорость на орбите с радиусом r_n . Момент импульса электрона L_n может быть равен только целому числу постоянных Планка \hbar (т.е. \hbar - это квант момента импульса).

Такая полуклассическая модель, когда электроны рассматриваются как классические точечные частицы, летающие вокруг атомного ядра по отдельным разрешенным <u>боровским орбитам</u>, называется <u>боровской моделью атома.</u>



Рассмотрим модель <u>водородоподобного</u> или одноэлектронного атома, когда вокруг ядра с зарядом +Ze вращается по орбите с радиусом r_n единственный электрон. Это атом водорода $H_{z=1}$, ион гелия $He_{z=2}^+$, двукратно ионизированный ион лития $Li_{z=3}^{++}$ и т.п. Записав для электрона классическое уравнение движения $m\vec{a}_n = \vec{F}$ и подставив центростремительное ускорение $a_n = v_n^2/r_n$ и кулоновскую силу притяжения к ядру $F = k Ze^2/r_n^2$,

где $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$, получим $mv_n^2 = k Ze^2/r_n$. Решая это уравнение совместно с уравнением постулата Бора, легко найти разрешенные скорости электрона и радиусы орбит:

$$v_n = \frac{k Z e^2}{n \hbar}$$
, $r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m k Z e^2}$, $n = 1, 2, 3, ...$

Последнюю формулу записывают в виде

$$r_n = n^2 r_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где r_1 – боровский радиус или радиус первой боровской орбиты (для атома водорода (Z=1) он равен $r_1 = 5,291 \cdot 10^{-11}$ м.

6.2. Спектр энергии одноэлектронного атома. Главное квантовое число

Энергия электрона складывается из кинетической энергии и потенциальной энергии кулоновского взаимодействия с ядром:

$$E_n = \frac{m \, \mathbf{v}_n^2}{2} - \frac{k \, Z e^2}{r_n} \,.$$

Подставляя найденные выражения для v_n и r_n, находим величину разрешенной энергии электрона в водородоподобном

 $E_n = -\frac{k^2 Z^2 m e^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{|E_1|}{n^2},$ где целое число *n* =1, 2, 3,... называется <u>главным квантовым числом.</u> атоме:

Это число определяет величину разрешенной энергии боровского одноэлектронного атома.

Замечание: Зоммерфельд рассчитал энергии электронов, вращающихся вокруг ядра по эллиптическим орбитам, и получил тот же результат. Боровские орбиты могут быть не только круговыми, но и эллиптическими.

6.3. Излучение одноэлектронного атома. Спектральные серии

Фотоны с отдельными разрешенными частотами испускаются при переходах на низшие разрешенные уровни энергии (более близкие к ядру боровские орбиты). Используя формулу для разрешенных значений энергии E_n, находим

эти частоты:

$$\omega_{n' \to n} = \frac{E_{n'} - E_n}{\hbar} = \frac{k^2 m e^4}{2\hbar^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) = 2\pi c R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right),$$

где *п* и *n'* – целые числа, *c* – скорость света, *m* – масса электрона, $R = (k^2 m e^4)/(4\pi c\hbar^3) = 1,096 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – постоянная Рид-

берга. Эти формулы говорят о том, что спектр излучения атома дискретен. Длины волн излучаемых спектральных

линий определяются выражением

$$\lambda_{n' \to n} = \frac{2\pi c}{\omega_{n' \to n}} = \frac{2\pi c\hbar}{E_{n'} - E_n} = R^{-1} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)^{-1}$$

Спектр атома водорода или водородоподобных атомов может быть разделен на наблюдающиеся на опыте спектральные серии, соответствующие переходам электрона на определенный уровень энергии со всех лежащих выше возбужденных энергетических уровней. Соответствующие переходы между боровскими орбитами показаны на рисунке, где значения разрешенных энергий приведены для атома водорода (Z=1):



серия Лаймана - переходы на основной уровень энергии $n' \rightarrow n = 1$;

серия Бальмера – переходы в первое возбужденное состояние $n' \rightarrow n = 2$;

<u>серия Пашена</u> – переходы $n' \rightarrow n = 3$;

<u>серия Брэкета</u> – переходы $n' \rightarrow n = 4;$

<u>серия Пфунда</u> – переходы $n' \rightarrow n = 5;$

<u>серия Хэмфри</u> – переходы $n' \rightarrow n = 6$ и т.д.

Вычисленные длины волн спектральных серий водорода изображены на рисунке ниже. Так как разрешенные уровни энергии расположены все более плотно с ростом главного квантового числа *n*, то и линии спектральных серий с уменьшением



Как видно из рисунков, из-за большого промежутка между уровнями E_1 и E_2 серия Лаймана попадает в ультрафиолетовую

область. Серия Пашена и перекрывающаяся с ней серия Брэкета и т.п. оказывается в инфракрасной области. Глаз увидит только три первые линии серии Бальмера излучения водорода с $\lambda_{3\to2}$ = 656 нм , (красный свет), $\lambda_{4\to2}$ = 486 нм (бирюзовый свет) и λ_{5→2}= 434 нм (темно-фиолетовый цвет).

Максимальную и минимальную длину волны λ (частоту ω) в каждой спектральной серии можно вычислить используя записанные выше формулы и находя максимальную и минимальную разность энергий $E_{n'} - E_n = \frac{k^2 m e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$. Так максимальная частота излучения в серии Лаймана соответствует переходу $n' = \infty \rightarrow n = 1$, а минимальная частота – переходу $n' = 2 \rightarrow n = 1$: $\omega_{\text{Лайм max}} = \frac{|E_1|}{\hbar} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2} \right)$; $\omega_{\text{Лайм min}} = \frac{|E_1|}{\hbar} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)$. Максимальная длина волны спектральной линии в серии Бальмера соответствует переходу $n' = 3 \rightarrow n = 2$, а минимальная – переходу $n' = \infty \rightarrow n = 2$:

серия серия Брэкета серия Бальмера серия Пашена Паймана 200 4⁰0 600 800 1000 1200 1400 1800 1600 \leq



$$\lambda_{\text{Бал max}} = \frac{2\pi c\hbar}{|E_1|} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)^{-1}, \ \lambda_{\text{Бал min}} = \frac{2\pi c\hbar}{|E_1|} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2}\right)^{-1}, \ \text{где } E_1 = -\frac{k^2 m e^4}{2\hbar^2} - \text{энергия основного состояния атома}$$

водорода, равная -13,5 эВ.

Боровская планетарная модель правильно объясняет некоторые свойства атома – например, особенности спектров водородоподобных атомов, существование возбужденных состояний. Но попытки применить ее к объяснению спектров многоэлектронных атомов кончились неудачей. Кроме того, теория Бора не объяснила ряд особенностей спектра водорода, о которых мы еще не говорили. Наконец, второй постулат Бора запрещает существование электрона между двумя разрешенными боровскими орбитами. Попытка Бора представить электрон как частицу, исчезающую в одной точке пространства (на одной боровской орбите) и мгновенно возникающую в другой точке при скачкообразном излучении фотона (телепортация) недопустима. Поэтому боровская полуклассическая модель атома противоречива в принципе.

6.4. Орбитальный момент импульса и орбитальный магнитный момент электрона в атоме. Орбитальное и магнитное квантовые числа

В частности, неверно классическое выражение $\vec{L}_n = [\vec{r}_n, m\vec{v}_n]$ для орбитального момента импульса, созданного движением электрона по атомной орбите и записанное с помощью квантового постулата Бора. **Квантовая теория** приводит к выводу о том, что можно определить только величину вектора \vec{L} и его проекцию на одну из осей координат, например, L_z . Тогда проекции \vec{L} на другие оси *x* и *y* нельзя определить или измерить в принципе.



 $L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$, где целое число l = 0, 1, 2, ..., n-1 называется <u>орбитальным квантовым числом</u>. Его возможные значения ограничены значением главного квантового числа *n*.

 $L_z = \hbar m$, где целое число $m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l$ называется <u>магнитным квантовым числом</u>. Его возможные значения ограничены значением орбитального квантового числа *l*.

Постоянная Планка \hbar – это квант момента импульса микрочастицы.



Для примера на рисунке показана возможная ориентация вектора момента импульса электрона в состояниях с квантовыми числами l=1 и l=2. Так как проекции L_x и L_y определить невозможно, то вектор \vec{L} изображен на этом рисунке "размазанным" в конус с осью симметрии z. Величины L_z и L при этом определены. Но представить траекторию электрона в виде плоской орбиты, перпендикулярной фиксированному направлению \vec{L} , нельзя! Боровская модель неправильно описывает вращение электрона в атоме.

Напомним также, что двигаясь по круговой орбите радиуса *r* со скоростью v, частица с зарядом *q* совершает один оборот за время $\Delta t = 2\pi r/v$, и создает эффективный круговой ток $I = \Delta q/\Delta t = qv/2\pi r$. Площадь такого тока $S = \pi r^2$, а создаваемый им магнитный момент $p_m = IS = qv r/2$. С учетом направления векторов, указанных на рисунке справа, движущаяся заряженная частица обладает <u>магнитным моментом</u> $\vec{p}_m = \frac{q}{2}[\vec{r},\vec{v}]$. Если учесть, что момент импульса частицы $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r},\vec{v}]$, то оказывается, что магнитный момент и момент импульса движущейся заряженной частицы связаны <u>гиромагнитным</u> <u>отношением</u> $\vec{p}_m = (q/2m)\vec{L}$. Для электрона с зарядом -e и с массой m_e это отношение примет вид $\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$. Поэтому вектор орбитального магнитного момента, созданного движением электрона вокруг атомного ядра, изменяется так же, как и вектор орбитального момента импульса: можно определить только его величину, которая может принимать отдельные дискретные значения $p_m = \mu_E \sqrt{l(l+1)}$, где l = 0, 1, 2, ..., n-1, а постоян-

ная $\mu_E = e\hbar/2m_e = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{м}^2$ называется магнетоном Бора, а также его проекцию \vec{p}_m на одну выделенную ось z (тогда проекции p_{mx} и p_{my} принципиально не определены): $p_{mz} = -\mu_E m$, где $m = 0, \pm 1, ... \pm l$. Магнетон Бора – это квант магнитного момента. Классическая картинка движения электрона по плоской орбите, приведенная выше **неверна**.

6.5. Опыты Штерна-Герлаха

Попытка измерить магнитный момент \vec{p}_m впервые была сделана в <u>опытах Штерна-Герлаха</u> (1921г.), схема которых приведена на следующем рисунке.



Узкий пучок атомов, например атомов водорода, проходил через область неоднородного магнитного поля, градиент которого был направлен вдоль оси *z*. Каждый атом будет крошечным магнитным диполем, энергия которого во внешнем магнитном поле $W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$. Градиент этой энергии определяет силу, действующую на атом: $F_z = -\text{grad}_z W = p_{mz} \frac{\partial B_z}{\partial z}$. Отклонение атома вдоль оси *z* должно быть

пропорционально проекции *p_{mz}* его магнитного момента.

Результат опыта Штерна-Герлаха оказался странным: атомы пучка водорода, находившегося в основном состоянии с минимальной энергией $E_1 = -13,5$ эВ, могли иметь только нулевую проекцию $p_{mz} = -\mu_E \cdot m = 0$ (так как n = 1, l = 0, m = 0), и не должны были отклоняться, попадая в центральную точку 0. Однако они попадали в две симметрично расположенные точки P_1 и P_2 экрана, как показано на рисунке, т.е. имели два разрешенных значения проекции p_{mz} .

Формула для p_{mz} предсказывала расщепление пучка атомов на **нечетное** число 2l+1 пучков (это число разных значений магнитного квантового числа *m*). Но пучок даже возбужденных атомов разделялся на четное число пучков.

6.6. Собственный момент импульса и собственный магнитный момент электрона. Спиновое квантовое число

Для объяснения опыта Штерна-Герлаха и ряда особенностей спектров излучения атомов была предложена гипотеза о существовании у микрочастиц момента импульса, не связанного с движением частицы в пространстве. Такой момент называется собственным моментом импульса, или спином \vec{L}_s (от английского слова "spin" – кружение, верчение). Величина спина L_s строго фиксирована для каждой частицы и не может меняться.

Нельзя объяснить такой момент импульса реальным вращением частицы вокруг своей оси. Так величина спина электрона, следующая из эксперимента, $L_s = 9,14 \cdot 10^{-35}$ кг · м²/с. Если считать электрон шариком радиуса *r* с моментом

инерции $I = 2m_e r^2/5$, вращающимся вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = L_s/I$, то скорость движения точки на поверхности шарика $v = \omega r = 5L_s/(2m_e r)$. До сих пор размер электрона не измерен, по крайней мере, он много меньше размера атомного ядра $(r \ll 10^{-15} \text{ м})$. Это дает $v \gg 2,5 \cdot 10^{11} \text{ м/c}$, что значительно пре-

вышает скорость света в вакууме.

Спин микрочастиц не связан с действительным вращением в пространстве. Это – квантовое свойство. Даже если размер частицы равен нулю, она ведет себя так, как если бы вращалась с моментом импульса \vec{L}_{s} .

Тем не менее, собственный момент импульса определяется в квантовой теории аналогично орбитальному моменту импульса. Можно определить его величину и проекцию на выделенную ось *z*:

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)};$$
 $L_{sz} = \hbar \sigma$, где $\sigma = \dots \pm (s-1), \pm s$

И число *s*, и число **б** называют <u>спиновым квантовым числом</u>. Эти числа изменяться не могут и фиксированы для каждой микрочастицы.

Но с отсутствием реального вращения связаны две особенности спина.

1) В отличие от целых квантовых чисел l и m, спиновое число s может быть как целым, так и полуцелым. Для фотона s = 1; для электрона, протона, нейтрона s = 1/2.

2) С собственным моментом импульса связан собственный магнитный момент \vec{p}_{ms} . Но гиромагнитное отноше-

ние для него аномально, оно в два раза больше отношения орбитальных моментов. Для электрона $|\vec{p}_{ms} = -(e/m_e)\vec{L}_s$

Формулы квантования собственного магнитного момента электрона имеют вид:

$$p_{ms} = 2\mu_E \sqrt{s(s+1)}$$
, где $s = 1/2$; $p_{msz} = -2\mu_E \sigma$, где $\sigma = \pm 1/2$.



 $\sigma = -\frac{1}{2}$ $p_{s} = \sqrt{3}\mu_{b}$ $\sigma = +\frac{1}{2}$ $\sigma = -\frac{1}{2}$ $\sigma = -\frac{1}{2}$ $\sigma = -\frac$

6.7. Система четырех квантовых чисел и принцип Паули

Рассмотрим теперь многоэлектронные атомы, свойства которых определяются двумя фундаментальными принципами, которые являются постулатами квантовой теории и выполняются во всех случаях.

Принцип тождественности (тождественной неразличимости) микрочастиц: две совершенно одинаковые микрочастицы в одной квантовой системе абсолютно неразличимы. Если их поменять местами, то свойства системы не изменятся. Нельзя рассматривать состояние движения одного определенного электрона в системе из многих электронов и считать, что этот электрон не меняется местами с другими. Нельзя перенумеровать все электроны и проследить за движением каждого из них независимо от движения других электронов.

Из этого принципа выводится принцип запрета Паули: в одной квантовой системе в один момент времени не могут находиться две тождественные микрочастицы с полуцелым спином в одинаковом состоянии.

Так как состояние электрона в атоме описывается системой из четырех квантовых чисел (главного, орбитального, магнитного и спинового):

$$n = 1, 2, 3, ...;$$
 $l = 0, 1, 2, ..., n-1;$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l;$ $\sigma = \pm 1/2$,

то принцип Паули для атома можно сформулировать так:

в многоэлектронном атоме находятся электроны, отличающиеся значением хотя бы одного квантового числа.

6.8. Заполнение электронами оболочек и подоболочек в атоме

Естественно, что электроны будут находиться в основном состоянии с наименьшей возможной энергией, а так как все вместе собраться на низшем энергетическом уровне 1s они не могут по принципу Паули, то последовательно начнут заполнять все свободные уровни (состояния), начиная с низших.

Совокупность состояний электронов с одинаковым главным квантовым числом *n* называется электронной оболочкой атома. Каждая оболочка делится на электронные подоболочки, т.е. набор состояний с одинаковыми числами n и l. Оболочки и полоболочки атомов принято обозначать буквами:

Ν	1	2	3	4	5	l	l	0	1	2	3	4
оболочки	Κ	L	М	Ν	0	1	подоболочки	S	p	d	f	g
						<i>(</i>)						

Полностью заполненная подоболочка содержит 2. (21+1) электронов, различающихся значениями квантовых

чисел *m* и σ . В полностью заполненной оболочке будет $\boxed{\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2}$ электронов.

Электронную конфигурацию атома, т.е. распределение его электронов по оболочкам описывают перечислением заполняемых подоболочек (число слева указывает на номер оболочки, а индекс справа вверху показывает число электронов в данной подоболочке). Как видно из следующей таблицы, идеальная схема заполнения оболочек с ростом числа электронов Z действует до атома аргона (Z = 18). Начиная со следующего атома калия (Z = 19), заполняется sподоболочка следующей n = 4-оболочки, а подоболочка 3*d* остается незаполненной.

Таблица. Электронные конфигурации атомов в основном состоянии

Ζ	элемент	конфигурация	Ζ	элемент	конфигурация	Ζ	элемент	конфигурация
1	Η	$1s^1$	17	Cl	KL $3s^23p^5$			
2	He	$1s^2$	18	Ar	KL $3s^23p^6$	43	Tc	$KLM 4s^2 4p^6 4d^5 5s^2$
3	Li	$1s^22s^1$	19	Κ	KL $3s^23p^64s^1$	44	Ru	$KLM 4s^2 4p^6 4d^7 5s^1$
4	Be	$1s^22s^2$	20	Ca	KL $3s^23p^64s^2$	45	Rh	$KLM 4s^24p^64d^85s^1$
5	В	$1s^22s^22p^1$	21	Sc	KL $3s^23p^63d^14s^2$	46	Pd	KLM $4s^24p^64d^{10}$
6	С	$1s^22s^22p^2$				47	Ag	KLM $4s^24p^64d^{10}5s^1$
7	Ν	$1s^22s^22p^3$	28	Ni	KL $3s^23p^63d^84s^2$			
8	0	$1s^22s^22p^4$	29	Cu	KL $3s^23p^63d^{10}4s^1$	54	Xe	KLM 4s ² 4p ⁶ 4d ¹⁰ 5s ² 5p ⁶
9	F	$1s^22s^22p^5$	30	Zn	KLM 4s ²	55	Cs	KLM $4s^24p^64d^{10}5s^25p^66s^1$
10	Ne	$1s^22s^22p^6$	31	Ga	KLM $4s^24p^1$	56	Ba	KLM $4s^24p^64d^{10}5s^25p^66s^2$
11	Na	KL 3s ¹				57	La	KLM $4s^24p^64d^{10}5s^25p^65d^16s^2$
12	Mg	KL $3s^2$	36	Kr	KLM $4s^24p^6$	58	Ce	KLM 4s ² 4p ⁶ 4d ¹⁰ 4f ² 5s ² 5p ⁶ 6s ²
13	Al	KL $3s^23p^1$	37	Rb	KLM $4s^24p^65s^1$			
			38	Sr	KLM $4s^24p^65s^2$	64	Gd	KLM 4s ² 4p ⁶ 4d ¹⁰ 4f ⁷ 5s ² 5p ⁶ 5d ¹ 6s ²
			39	Y	$KLM 4s^2 4p^6 4d^1 5s^2$			

В этой таблице полностью заполненные оболочки обозначены буквами $K \equiv 1s^2$; $L \equiv 2s^2 2p^6$; $M \equiv 3s^2 3p^6 3d^{10}$.

Причина в том, что полученные ранее формулы для E_n , L, p_m и т.п. были записаны для одноэлектронного атома, а в многоэлектронных атомах надо учесть энергию взаимодействия электронов не только с ядром, но и друг с другом. По этой причине энергии, соответствующие 4*s*-подоболочке, оказываются ниже уровней энергии 3*d*-подоболочки и т.п. Именно из-за этого взаимодействия уровни энергии разных подоболочек значительно расходятся, а интервалы их значений перекрываются. Говорят, что перекрываются электронные оболочки. При этом следующая электронная оболочка может начинать заполняться электронами при не заполненной предыдущей.

7. СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ КВАНТОВЫХ МИКРОСИСТЕМ

7.1. Опыт с прохождением микрочастицы через двухщелевую диафрагму. Волновая функция

Рассмотрим причины, по которым квантовые законы физики молекул, атомов, ядер и элементарных частиц так сильно отличаются от законов классической физики. Для этого представим себе электроны, которые **по одному** подлетают к непрозрачной преграде с двумя узкими щелями-прорезями, и одна из щелей закрыта (мысленный опыт Фейнмана или опыт по дифракции микрочастиц). Точно известно, что электроны пролетают через единственную открытую щель, рассеиваясь в стороны на её краях, и интенсивность почернения I(x) расположенной сзади фотопластинки имеет вид единственного пика с центром напротив щели.



Такой же пик получится и напротив второй щели, если мы будем уверены, что электроны пролетают сквозь нее. Поэтому если установить детекторы Д, точно определяющие щель,

через которую летит каждый электрон, то почернение фотопластинки должно быть суммой двух пиков (рисунок слева).



-e

Но электроны обладают волновыми свойствами (волна де Бройля), а волны, проходящие через две щели, должны интерферировать. Т.е. если за электронами не следить и не определять, через какую именно щель пролетает каждый электрон, то на фотопластинке окажется интерференционная картина полос почернения (рисунок справа).

То есть поведение микрочастицы и конечный результат зави-



сит от того, следим мы за частицей или нет.

Дело в том, что любой *измерительный* прибор регистрирует информацию ☐ о каком-либо объекте, только **взаимодействуя с ним**. Например, детектор Д – это заряженный листочек электроскопа, и по отклонению этого листочка регистрируется пролетающий элек-

трон. Но одновременно отклоняется и пролетающая частица. Микрочастицы – настолько малые объекты, что любые физические изменения их положения или

скорости любыми приборами или методами будут изменять движение частиц. Информация о положении и о скорости микрочастицы, т.е. о ее траектории принципиально не подлежит измерению. Любая попытка получить эту информацию изменит траекторию микрочастицы.

Так, определяя детекторами Д щель, через которую пролетает каждый электрон, мы изменяем состояние его движения и конечное распределение интенсивности на фотопластинке. В отличие от классической физики, в квантовой теории теряют смысл динамические переменные: координаты \vec{r} , скорость \vec{v} , импульс \vec{p} , энергия E и т.п. Они принципиально неопределимы. Если они известны для микрочастицы, то тем самым известна и ее классическая траектория, а тогда известна щель, через которую она пролетит в рассмотренном опыте Фейнмана. Интерференционной картины, наблюдаемой на опыте, мы при этом не получим.

При этом динамические переменные \vec{r}, \vec{p}, E нельзя не только измерить, но даже, записав

для них формулы, мысленно определить для микрочастицы, не изменив ее движения.

Можно определить только состояние движения микрочастицы, описываемое с помощью некоторой <u>функции</u> состояния Ψ .

Пусть состояние движения электрона, при котором он заведомо пролетает через щель 1 (или через щель 2) на рисунке, описывается функцией Ψ_1 (или Ψ_2). Чтобы произошла интерференция, волна должна одновременно пройти через обе щели. Поэтому состояние движения электрона, прошедшего через преграду и создающего на фотопластинке интерференционные полосы, должно быть суммой (смесью, суперпозицией) двух состояний электрона, соответствующих прохождению через щель 1 и щель 2: $\Psi \sim \Psi_1 + \Psi_2$. Только так можно объяснить интерференцию и наблюдаемые волновые свойства частиц. Поэтому функцию состояния Ψ называют также волновой функцией.

Замечание: нельзя говорить, что падающие электроны с вероятностью 50% проходят через щель 1 и с вероятностью 50% – через щель 2. Это утверждение означает, что нам известно, что частица проходит через определенную щель, хотя и не известно, какая именно частица. В результате получим картину классического распределения на рисунке слева.

Формула $\Psi \sim \Psi_1 + \Psi_2$ означает, что каждый электрон, оказавшийся за преградой, является смесью двух электронов: прошедшего через щель 1 и прошедшего через щель 2. Вообразите себе дом с двумя открытыми дверями, в котором находилась кошка. За кошкой не следили, и когда она выбежала из дома, то оказалась смесью двух кошек, выбежавших



через разные двери. Это сравнение показывает, насколько различаются свойства и способы описания микрообъектов и классических объектов. Классическая кошка не проявляет волновых свойств, и, независимо от того следят за ней или нет, окажется кошкой, пробежавшей через единственную дверь.

Те же рассуждения справедливы для **неделимых** квантов электромагнитного излучения – фотонов. Если источник излучения очень слаб, то фотоны подлетают к преграде со щелями по одному и не могут разделиться и одновременно пройти через обе щели. Тем не менее, за преградой они оказываются суммой двух волн, характеризуемых напряженностями \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , которые складываясь создают интерференционную картину на фотопластинке.

7.2. Вероятностный смысл волновой функции. Квантовый принцип суперпозиции

Наблюдаемой на опыте величиной должна быть не волновая функция Ψ , а квадрат ее модуля $|\Psi|^2$, пропорциональный освещенности или почернению фотопластинки, т.е. числу попавших в данную точку микрочастиц. Если электроны или фотоны подлетают по одному, то приходится ждать достаточно долго, чтобы преграду преодолело большое число частиц *N*, и интерференционные полосы оказались четкими.

Разделив число микрочастиц dN, попавших на участок фотопластинки с координатами от x до x + dx, на число частиц N, падавших на преграду, получим вероятность попадания частиц в пределы данного участка: $d\mathcal{P} = dN/N$. Число dN пропорционально ширине dx участка и его освещенности (почернению). Поэтому можно придать волновой функции определенный физический смысл, связывая ее с вероятностью обнаружения частиц: $d\mathcal{P} = |\Psi|^2 dx$. То же самое справедливо для микрочастицы, еще не попавшей на фотопластинку.

Если состояние движения частицы описывается волновой функцией $\Psi(\vec{r},t)$, то вероятность ее обнаружения в пределах малого объема dV в момент времени t определяется формулой $d\mathcal{P} = |\Psi(\vec{r},t)|^2 dV$.

Здесь \vec{r} – не координаты частицы, которые остаются принципиально неопределенными, а координаты участка пространства с объемом dV.

Вывод: чтобы объяснить корпускулярно-волновой дуализм, приходится считать единый микрообъект волна-

частица «размазанным» в пространстве с <u>плотностью вероятности</u> $d\mathcal{P}/dx = |\Psi|^2$. Волны де Бройля – это волны вероятности обнаружения микрочастицы.

Это не означает, что в пространстве размазывается сама частица. При попытке обнаружить ее с помощью какого либо прибора частица изменит своё состояние и будет найдена в какой-то точке, но в какой – неизвестно заранее. "Размазанной" в пространстве оказывается область, в которой частица с вероятностью \mathcal{P} может быть обнаружена.

При движении частицы в трехмерном пространстве часто рассматривают центрально-симметричные задачи, когда частица движется вблизи центра 0, создающего потенциальное поле (это, например, центр атома, в котором находится частица-электрон). В этом случае волновая функция частицы зависит от расстояния r до этого центра, а функцию <u>плотности</u> <u>вероятности</u> определяют как $d\mathcal{P}/dr = 4\pi r^2 |\Psi(r)|^2$, вводя элемент объема $dV = 4\pi r^2 dr$. В этом случае $d\mathcal{P}$ - это вероят-

ность того, что частица находится в узком сферическом слое с координатами от r до r + dr вблизи центра 0.

Вероятность того, что в данный момент времени *t* частица присутствует "где-то" равна 1. Поэтому, проинтегрировав выражение для плотности вероятности по всему объему нашего мира, мы получим <u>условие нормировки волновой функ-</u>

щии:
$$\int \left|\Psi\left(\vec{r},t\right)\right|^2 dV = 1.$$

Состояние движения микрочастицы задается только ее волновой функцией $\Psi(\vec{r},t)$. Все остальные физические переменные $f = \vec{r}, \vec{p}, E,...$ для частицы **принципиально не определены**. Но всегда можно произвести опыт и измерить значение любой переменной *f*. Это значение будет конкретным числом (если не учитывать погрешность измерения прибора). Все значения переменной *f*, которые может иметь частица и которые могут быть измерены на опыте, называются <u>разрешенными</u>. Мы видели, что такими разрешенными значениями могут быть отдельные величины энергии электрона *E_n* в атоме, его момента импульса *L*, магнитного момента *p_m* и.т.п.

Если переменная f принимает одно из разрешенных значений f_n , n = 1, 2, 3, ..., то частица заведомо находится в состоянии с таким значением $f = f_n$, которое описывается конкретной волновой функцией $\Psi = \Psi_n$. Но до процесса измерения не известно, какое конкретное значение величины f будет измерено. Известно лишь то, что оно может оказаться любым из разрешенных значений f_n , n = 1, 2, 3, Это позволяет сформулировать основной постулат квантовой теории – <u>принцип квантовой суперпозиции:</u>

любое состояние микрочастицы является суперпозицией (суммой) состояний, соответствующих всем разрешенным значениям любой из физических переменных $f: \frac{\Psi(\vec{r},t) = \sum_{n} c_n \Psi_n(\vec{r},t)}{n}$,

где c_n – постоянные коэффициенты, квадрат модуля которых $\mathcal{P}_n = |c_n|^2$ – это вероятность того, что при измерении переменной f, будет получено разрешенное значение $f = f_n$.

Естественно, что сумма вероятностей всех возможных результатов $\sum_{n} \mathcal{P}_{n} = \sum_{n} |c_{n}|^{2} = 1$. $\Pi pumep:$ отдельные фотоны обладают всеми характеристиками



 Ψпрош
 Пример:
 отдельные
 фотоны
 обладают
 всеми
 характеристиками

 >электромагнитной волны.
 Поэтому фотоны, прошедшие
 через поляризатор,
 удут поляризованы в плоскости пропускания поляризатора.
 Далее
 эти фо

 Inpoш
 Inpoш
 которого повернута на угол θ относительно плоскости пропускания поляризатора.
 Но каждый отдельный падающий на анализатор фотон неделим и

 не может быть пропущен частично.
 не может быть пропущен частично.
 на стично.

С точки зрения квантовой теории волновая функция падающего фотона является суперпозицией состояний: $\Psi_{\text{пад}} = \cos \theta \cdot \Psi_{\parallel} + \sin \theta \cdot \Psi_{\perp}$. Взаимодействие с анализатором переведет фотон либо в состояние с плоскостью поляризации, совпадающей с плоскостью пропускания анализатора (оно описывается волновой функцией Ψ_{\parallel}), либо в состояние с перпендикулярной плоскостью поляризацией (и с волновой функцией Ψ_{\perp}). В состоянии Ψ_{\parallel} фотон **целиком** будет пропущен через анализатор, а в состоянии Ψ_{\perp} будет полностью поглощен. Коэффициенты $c_1 = \cos \theta$ и $c_2 = \sin \theta$ в этом разложении удовлетворяют условию $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. Вероятность того, что отдельный фотон перейдет в состояние Ψ_{\parallel} и будет пропущен анализатором $\mathcal{P} = \cos^2 \theta$. При падении большого числа фотонов $N_{\text{падающ}}$ через анализатор пройдут $N_{\text{прошелш}} = N_{\text{падающ}} \cdot \cos^2 \theta$ фотонов в соответствии с законом Малюса $I_{\text{прошелш}} = I_{\text{палающ}} \cos^2 \theta$

7.3. Принцип неопределенности Гейзенберга. Соотношения неопределенностей и их смысл

Если электрон не движется как точечная частица, а с плотностью вероятности $|\Psi|^2$ одновременно обнаруживается в разных точках пространства, то как связать это с тем, что для него точно известна, например, траектория в кинескопах, позволяющих электрону попасть в нужное место экрана? Покажем далее, как это затруднение объясняется квантовой теорией.

 $\begin{array}{c} -e \\ \lambda_{5} \\ \Delta x = a \end{array} \begin{array}{c} \varphi_{1} \\ \varphi_{1} \\ \varphi_{1} \\ \varphi_{1} \\ \varphi_{1} \\ \varphi_{2} \\ \varphi_{3} \\ \varphi_{4} \\ \varphi_{5} \\ \varphi_{$

Рассмотрим электрон с длиной волны де Бройля $\lambda_{\rm b}$ и импульсом *p*, падающий на щель ширины *a*. Чтобы электрон прошел за щель, он должен попасть в любую ее точку, т.е. неопределенность координаты *x* электрона $\Delta x = a$.

Обладая свойствами волны, электрон испытывает дифракцию на щели. Будем считать, что он рассеивается в пределах центрального дифракционного максимума и приобретает неопределенность проекции импульса на поперечную ось $x: \Delta p_x \sim p \sin \varphi_1$, где $\varphi_1 -$ угол, соответст-

вующий первому дифракционному минимуму, определяемому условием $a \cdot \sin \varphi_1 = 1 \cdot \lambda_{\rm B}$.

Тогда, подставляя выражение длины волны де Бройля $\lambda_{\rm E} = 2\pi\hbar/p$, получаем $\Delta p_x \sim p \cdot \frac{\lambda_{\rm E}}{a} = \frac{2\pi\hbar}{a}$ или $\Delta p_x \cdot \Delta x \sim 2\pi\hbar$.

Это – качественный расчет, но он приводит к важному результату. Чтобы точнее определить координату рассеиваемого электрона, начнем уменьшать ширину щели. При этом неопределенность соответствующей проекции импульса начнет возрастать (электрон может попасть в любую точку центрального дифракционного максимума, который будет расширяться).

Вывод: координату *x* и проекцию импульса *p_x* электрона нельзя определить одновременно. Попытка уменьшить неопределенность одной переменной приведет к увеличению неопределенности другой переменной. Это – следствие корпускулярно-волнового дуализма.

Физические переменные, которые нельзя определить или измерить одновременно называются <u>сопряженными</u>. К ним относятся: x и p_x ; y и p_y ; z и p_z ; t (время) и E (энергия микрочастицы); φ (угол поворота вокруг оси z) и L_z . Гейзенберг вывел точные <u>соотношения неопределенностей</u> для любой пары сопряженных физических переменных:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \ge \frac{\hbar}{2}; \ \Delta y \cdot \Delta p_y \ge \frac{\hbar}{2}; \ \Delta z \cdot \Delta p_z \ge \frac{\hbar}{2}; \ \Delta t \cdot \Delta E \ge \frac{\hbar}{2};...$$

Эти соотношения и составляют суть принципа неопределенности Гейзенберга:

Ни в одном эксперименте, никакими идеальными измерительными приборами нельзя одновременно измерить точные значения двух сопряженных переменных для одного и того же микрообъекта. Нельзя даже предположить, что одновременно известны величины двух сопряженных переменных – это приведет к противоречию.

Неопределенности сопряженных величин Δx , Δp_x ,... не связаны с погрешностями приборов или методов измерения. Можно предложить опыт, в котором одна из сопряженных переменных измеряется точно. Неопределенность второй переменной при этом возрастет до бесконечности, и о ее величине нельзя будет сказать ничего. Например, координату электрона можно найти с идеальной точностью ($\Delta x \rightarrow 0$) и обнаружить, что он находится в некоторой точке пространства. Тогда совершенно неизвестно, с каким импульсом электрон пролетает через эту точку ($\Delta p_x \rightarrow \infty$). Если же точно определить импульс, то неизвестно, какую точку пространства пролетает электрон с этим импульсом.

Вывод, следующий из этого примера, известен как <u>принцип дополнительности</u>, сформулированный Н.Бором: получение информации об одних свойствах микрочастицы, об одних ее физических величинах приводит к потере информации о других ее свойствах, о других сопряженных (или дополнительных) величинах.

Оценим неопределенности координат и импульсов частиц, используемых в технических устройствах. Пусть электрон, ускоренный разностью потенциалов $\Delta \phi = 100$ В и обязанный по классическим представлениям обладать импульсом $p = \sqrt{2me\Delta\phi} = 5,4\cdot 10^{-24}$ кг · м/с, имеет совсем незаметную неоп-

ределенность импульса $\Delta p \sim 10^{-6} \cdot p$. Тогда неопределенность его координаты $\Delta x \sim \frac{\hbar}{2\Delta p} \sim 0.01$ мм.

траектория электрона

Это – поперечный размер траектории электрона. С точки зрения технических приложений такая "неопределенная траектория" выглядит чрезвычайно тонкой линией, и ее конечную ширину можно не учитывать, считая электрон классической

частицей. Другое дело – изделия микроэлектроники или нанотехнологий, где размер устройства сравним с ∆x, и электрон надо рассматривать только как квантовый, "размазанный" в пространстве объект.

Соотношения неопределенностей позволяют сделать некоторые важные заключения.



1) Пусть движение микрочастицы с массой *m* ограничено участком пространства с непрозрачными стенками (такой участок, изображенный на рисунке, называется <u>потенциальным ящиком</u>). Так как частица заведомо находится внутри данной области, то неопределенности ее координат не превышают поперечного размера потенциального ящика: $\Delta x, \Delta y, \Delta z \leq d$. Поэтому

$$(\Delta p_x)_{\min} = (\Delta p_y)_{\min} = (\Delta p_z)_{\min} \approx \frac{\hbar}{2(\Delta z)_{\max}} = \frac{\hbar}{2d}$$
, а кинетическая энергия частицы не может быть

меньше величины $E_{\text{кин min}} = \frac{(\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2}{2m} \approx \frac{3\hbar^2}{8md^2}$. При уменьшении размеров потенциального ящика наи-

меньшая разрешенная энергия находящейся в нем частицы должна возрастать!

По этой причине электрон не может упасть на ядро атома или находиться внутри ядра. Его кинетическая

энергия будет возрастать быстрее потенциальной. Суммарная энергия $E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} \ge \frac{3\hbar^2}{8md^2} - \frac{k Z e^2}{d}$ окажется поло-

жительной, и электрон обязан покинуть ядро.

2) Соотношение $\Delta t \cdot \Delta E \ge \hbar/2$ говорит о том, что энергия микрочастицы может без всяких на то причин меняться на величину ΔE . Энергия ΔE уносится <u>виртуальными</u> частицами или квантами, которые спустя время $\Delta t \sim \hbar/(2\Delta E)$ обязаны исчезнуть, т.е. быть поглощенными либо первоначальной частицей, либо другими частицами системы.

Любая микрочастица окружена "облаком" непрерывно испускаемых и поглощаемых виртуальных частиц, которое мы называем полем. Электроны и другие частицы с электрическим зарядом окружены "облаком" виртуальных фотонов, образующих электромагнитное поле, изображенное на рисунке справа. Взаимодействие на расстоянии посредством поля происходит при обмене виртуальным фотоном, переносящим энергию ΔE и импульс $\Delta \vec{p}$ от одной заряженной частицы к другой (электрический заряд фотоны не переносят).



Все физические поля имеют квантовую природу. Если устремить $\hbar \to 0$, то $\lambda_{\rm E} \to 0$,

и частицы потеряют волновые свойства, станут классическими с определенными траекториями и определенными динамическими переменными \vec{r}, \vec{p}, E . Но при этом исчезнут все поля, и мы получим мир классических, взаимодействующих только при непосредственных столкновениях частиц. Мир превратится в идеальный газ.

7.4. Условия применимости классического и квантового описания физических систем

Все физические системы состоят из микрочастиц – атомов, молекул, электронов и т.п. Поэтому они подчиняются квантовым законам. Однако очень многие физические явления можно описать законами классической физики и получить очень хорошее соответствие с опытом. Для описания траектории камня, брошенного в поле силы тяжести Земли, или электрона, вылетевшего из электронно-лучевой трубки кинескопа, можно обойтись уравнениями классической физики.

Вывод: при некоторых условиях квантовая теория должна давать те же результаты, что и классическая. Уравнения квантовой теории будут переходить в уравнения классической физики.

Выясним эти условия. Оказывается, что получить уравнения квантовой теории из уравнений классической физики достаточно просто. Для этого, например, надо записать выражение (формулу) для любой величины f классической физики, выразив все переменные величины в ней через координаты и импульсы частиц системы: $f(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$. Затем – заменить все классические импульсы на дифференциальные операторы:

$$p_x \to \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}; \quad p_y \to \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}; \quad p_z \to \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{или} \quad \vec{p} \to \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla} = -i\hbar \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Получим оператор данной величины в квантовой теории $\hat{f} = f(x, y, z, \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ (дифференциальные операторы квантовой теории будем обозначать значком"^"). Координаты *x*, *y*, *z* при этом не меняются.

Этот оператор должен действовать на волновую функцию системы. Решая дифференциальное уравнение

$$\hat{f}\Psi_n\left(\vec{r},t\right) = f_n\Psi_n\left(\vec{r},t\right)$$

можно найти все разрешенные значения f_n , n = 1, 2, 3, ... любой физической величины f в квантовой теории и соответствующие им волновые функции $\Psi_n(\vec{r}, t)$. Это – <u>процедура квантования</u>.

Например, уравнение движения классической частицы (второй закон Ньютона) запишется в квантовой теории в операторном виде: $\frac{d\hat{\vec{p}}}{dt}\Psi = \hat{\vec{F}}\Psi = -\text{grad}\,\hat{E}_{\text{пот}}(x, y, z)\Psi$.

В классической физике все величины f можно определить точно, а в квантовой теории в соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга они имеет неопределенность Δf . Очевидно результаты квантовой теории перейдут в результаты классической физики, если этой неопределённостью можно пренебречь, т.е. она пренебрежимо мала по сравнению с величиной $f: |\Delta f| \ll |f|$.

Будем считать, что микрочастица совершает одномерное движение во внешнем поле, и ее потенциальная энергия в этом поле равна $E_{\text{пот}}(x)$. Формула для полной энергии частицы $E = \frac{p_x^2}{2m} + E_{\text{пот}}(x)$ позволяет записать выражение для её импульса в виде импульс $p_x = \sqrt{2m(E - E_{\text{пот}}(x))}$. Отсюда

$$\frac{dp_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{2m\left(E - E_{\text{пот}}\left(x\right)\right)} \right) = \frac{-2m\left(\partial E_{\text{пот}}/\partial x\right) \cdot dx}{\sqrt{2m\left(E - E_{\text{пот}}\right)}} = -\frac{2m}{p_x} \left(\frac{\partial E_{\text{пот}}}{\partial x}\right).$$

Заменим в этой формуле дифференциалы на неопределенности, которые очень малы, поскольку связаны соот-

ношением с очень малой константой \hbar : $\Delta x \sim \hbar/2\Delta p_x$: $\Delta p_x \sim -\frac{2m}{p_x} \left(\frac{\partial E_{\text{пот}}}{\partial x}\right) \frac{\hbar}{2\Delta p_x}$ или $\left(\Delta p_x\right)^2 = \left|\frac{m\hbar}{p_x} \left(\frac{\partial E_{\text{пот}}}{\partial x}\right)\right|$.

Неопределенность Δp_x можно не учитывать, если она очень мала по сравнению с величиной импульса: $(\Delta p_x)^2 \ll p_x^2$,

откуда

$$p_x^3 \gg m\hbar \left| \frac{\partial E_{\Pi OT}}{\partial x} \right|.$$

Это соотношение будет условием применимости уравнений классической физики:

систему можно описывать с помощью законов классической физики, если ее импульс достаточно велик. Как правило, это условие выполнено для макроскопических тел с большой массой, которые являются классическими объектами. Но классическими уравнениями можно описать и микрочастицу, движущуюся в достаточно плавно меняющихся полях.



Пример: электрон, движущийся в вакууме, в поле заряженного металла можно считать классической частицей. Но на границе металла его энергия меняется резко, $|\partial E_{\text{пот}}/\partial x|$ – великлассической частицей. По на границе металла его энергия меняется резко, $|O E_{\Pi OT}/O x| = вели-$ ко. Внутри металла записанное условие также не выполняется, так как на электрон действуют $огромные силы <math>F_x = -\partial E_{\Pi OT}/\partial x$ со стороны других электронов и ионов решетки. Движение электрона в металле подчиняется квантовым законам.

Наконец, можно сформулировать принцип соответствия классической и квантовой физики: если перейти к пределу $\hbar \to 0$, то все результаты квантовой теории перейдут в соответствующие результаты классической теории.

7.5. Стационарное и нестационарное уравнение Шредингера

Корпускулярные и волновые свойства фотона и микрочастицы аналогичны. Если фотону с энергией ħω, летящему вдоль оси х, можно сопоставить волновую функцию плоской монохроматической электромагнитной волны, распространяющейся вдоль этой оси: $\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$, где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, а величина \vec{E} является напряженностью электрического поля волны, то заменив частоту и длину волны фотона на частоту и длину волны де Бройля, получим волновую функцию микрочастицы $\Psi(x,t) = A\cos(\omega_{\rm B} t - 2\pi x/\lambda_{\rm B})$, которую обычно записывают в виде экспоненты от комплекс-

ной переменной: $\Psi(x,t) = A e^{-i(\omega_{\rm b} t - 2\pi x/\lambda_{\rm b})} = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$ - это <u>волновая функция свободной микрочастицы</u> с энергией Е и импульсом p, летящей вдоль оси x, где A – некоторая постоянная

Вычислим производные от функции этой функции: $E = \frac{i\hbar}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad p = -\frac{i\hbar}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad p^2 = -\frac{\hbar^2}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}.$

Уравнение квантовой теории, позволяющее найти волновую функцию, должно иметь одинаковую форму для любых состояний, в том числе и для свободной частицы. Если полная энергия Е нерелятивистской частицы определена, то она

будет суммой потенциальной энергии $E_{\text{пот}}(x,t)$ и кинетической энергии $E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$, т.е. $E = \frac{p^2}{2m} + E_{\text{пот}}(x,t)$.

Подставляя в эту формулу величины E и p^2 , выраженные выше через производные от волновой функции Ψ , приходим к дифференциальному уравнению

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + E_{\text{IIOT}}(x,t)\cdot\Psi$$

Оно называется нестационарным уравнением Шредингера и было предложено Шредингером в 1927 г. для описания волновых свойств микрочастиц. Нестационарным уравнение оно называется потому, что входящая в него потенциальная энергия взаимодействия микрочастицы с внешними телами зависит от времени t.

Чаще встречаются задачи, когда частица движется в стационарном внешнем поле, и ее потенциальная энергия не зависит явно от времени.

В этом случае зависящая от времени волновая функция может быть записана в виде $\Psi(x,t) = e^{-\frac{t}{\hbar}Et}\psi(x)$, где новая волновая функция $\psi(x)$, зависящая только от координат, является решением одномерного <u>стационарного уравнения</u>

Шредингера:

 $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - E_{\text{пот}}(x) \right) \psi(x) = 0 \, .$

Заметим, что это уравнение получится с помощью процедуры квантования энергии, описанной в разделе 28.4:

$$\hat{E}\psi(x) = \left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + E_{\text{пот}}(x)\right)\psi(x) = \left(\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2 + E_{\text{пот}}(x)\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

Реальная частица движется в 3-мерном пространстве, и для неё $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = -\hbar^2 \Delta \Psi / \Psi$, где

 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - ди \phi \phi e pe нциальный <u>оператор Лапласа</u>. Для неё <u>стационарное уравнение Шредингера</u> имеет вид$

$$\Delta \psi(x, y, z) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - E_{\text{nor}}(x, y, z) \right) \psi(x, y, z) = 0.$$

7.6. Рассеяние микрочастицы на прямоугольном потенциальном барьере и на прямоугольной потенциальной ступеньке

Чтобы не усложнять формулы подстрочными обозначениями, будем в дальнейшем обозначать потенциальную энергию частицы буквой U: $E_{\text{пот}}(x) \equiv U(x)$.

Пусть микрочастица с массой m и энергией E движется в области I, где её потенциальная энергия постоянна и приближается к границе области II, за которой её потенциальная энергия скачком возрастает на величину U_0 . Говорят, что частица налетает на <u>потенциальную ступеньку высоты U_0 </u>.

 ψ_{orp} U(x) К потенциальной энергии U(x) можно добавить или вычесть любую постоянную величину. Поэтому совместим начало координат x = 0 со ступенькой и будем считать, что в области I (x < 0) потенциальная энергия падающей на ступеньку частицы равна нулю, а величина энергии $E < U_0$ (см. рисунок).

Состояния частицы в областях I и II должны описываться волновыми функциями $\psi_{I}(x)$ и $\psi_{II}(x)$ соответственно (рассматриваем одномерное движение частицы вдоль оси *x*). Стационарные уравнения Шредингера для частицы в этих областях запишутся в виде:

$$\frac{d^{2}\psi_{\mathrm{I}}}{dx^{2}} + \frac{2m}{\hbar^{2}}(E-0)\psi_{\mathrm{I}} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d^{2}\psi_{\mathrm{I}}}{dx^{2}} + k^{2}\psi_{\mathrm{I}} = 0 \quad \text{при} \quad x < 0; \\ \frac{d^{2}\psi_{\mathrm{II}}}{dx^{2}} + \frac{2m}{\hbar^{2}}(E-U_{0})\psi_{\mathrm{II}} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d^{2}\psi_{\mathrm{II}}}{dx^{2}} - \mathbf{a}^{2}\psi_{\mathrm{II}} = 0 \quad \text{при} \quad x > 0, \\ \mathbf{a}^{2} = 2m(U_{0}-E)/\hbar^{2}. \end{cases}$$
 если ввести положительные константы $k^{2} = 2mE/\hbar^{2}$ и $k^{2} = 2m(U_{0}-E)/\hbar^{2}.$

Решения этих уравнений известны:

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = \underbrace{Ae^{i\,k\,x}}_{=\psi_{\mathrm{nag}}} + \underbrace{Be^{-i\,k\,x}}_{=\psi_{\mathrm{orp}}}; \qquad \psi_{\mathrm{II}}(x) = \underbrace{Ce^{-\mathfrak{a}\,x}}_{=\psi_{\mathrm{np}}} + \underbrace{Fe^{\mathfrak{a}\,x}}_{=0},$$

где A, B, C, F – постоянные интегрирования, i – мнимая единица $(i^2 = -1)$.

Физический смысл полученных решений очевиден, если подставить выражение кинетической энергии $E-U = p^2/2m$. Тогда в области I, где частица может свободно двигаться, имеем $k = p/\hbar$. Согласно формулам раздела 28.5, волновая функция $\psi_{\text{пад}} = A e^{ikx} = A e^{i p x/\hbar}$ описывает свободную частицу, летящую вдоль оси x, т.е. **падающую** на ступеньку. Волновая функция $\psi_{\text{отр}} = B e^{-ikx} = B e^{-i p x/\hbar}$ соответствует частице, летящей против оси x, т.е. **отраженной** от ступеньки.

Волновая функция $\psi_{\Pi p} = Ce^{-acx}$ опишет состояние частицы, **прошедшей** в область II (классическая частица в этой области существовать не может, так как ее импульс $p = \sqrt{2m(E-U_0)}$ будет мнимым). Постоянную интегрирования *F* приравниваем нулю из граничного условия $|\psi_{\Pi}|_{x\to\infty}^2 \neq \infty$ (вероятность обнаружения частицы в области $x \to \infty$ не может быть бесконечной).

Постоянные A, B и C находим из условия непрерывности функции $\psi(x)$ на границе областей I и II:

на любой границе следует приравнять волновые функции и их первые производные $\psi_{\mathrm{I}}\Big|_{x=0} = \psi_{\mathrm{II}}\Big|_{x=0}$; $\frac{d\psi_{\mathrm{II}}}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{d\psi_{\mathrm{II}}}{dx}\Big|_{x=0}$.

После подстановки функций в эти условия, получим систему из двух линейных уравнений:

$$A+B=C, ik A-ik B=-ac C$$
 is experimented $B=\frac{k-ia}{k+ia}A, C=\frac{2k}{k+ia}A$

Найдем коэффициент отражения R, равный вероятности отражения (рассеяния) частицы от потенциальной ступеньки. Правильнее определить его с помощью потока частиц j – это число частиц, пролетающих за единицу времени через единичную поперечную площадку – и определять R как отношение потока отраженных частиц к потоку падающих: $R = j_{otp}/j_{nad}$. Но в данном примере можно определить эту вероятность как отношение вероятности того, что частица движется вдоль оси x (падает на ступеньку) к вероятности того, что частица движется против оси x (отразилась от ступеньки). Эти вероятности пропорциональны квадрату модуля волновой функции. А так как $\left|e^{\pm ikx}\right|^2 = \left(e^{\pm ikx}\right)^* e^{\pm ikx} =$

$$= e^{\mp ikx} e^{\pm ikx} = 1, \text{ to} \qquad R = \left|\psi_{\text{orp}}\right|^2 / \left|\psi_{\text{nag}}\right|^2 = \left|B\right|^2 / \left|A\right|^2 = \left|\frac{k - i\alpha}{k - i\alpha}\right|^2 = \frac{(k - i\alpha)^* (k - i\alpha)}{(k + i\alpha)^* (k + i\alpha)} = 1.$$

Тем не менее, отлична от нуля вероятность обнаружить частицу области II, куда она по законам классической физики попасть не может, так как её полная энергия E меньше потенциальной энергии U_0 :

$$\left|\psi_{\rm np}\right|^2 = \left|C\,e^{-\varpi x}\right|^2 = \left|\frac{2k}{k+i\varpi}\,A\right|^2 e^{-2\varpi x} = \frac{4k^2}{k^2+\varpi^2} \left|A\right|^2 e^{-2\varpi x} = \frac{4E}{U_0} \exp\left(\frac{-2\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}\,x\right) > 0\,.$$

Эта вероятность убывает по экспоненте с глубиной проникновения x в классически запрещенную область и очень быстро становится пренебрежимо малой. Частицы не могут далеко проникать в область II и, в конце концов, обязаны отразиться от ступеньки с вероятностью R = 1.

Но если вместо бесконечной прямоугольной потенциальной ступеньки рассмотреть прямоугольный потенциальный барьер конечной ширины *a*, то частица с конечной вероятностью $|\psi_{np}|^2|_{x=a} = \text{const} \cdot e^{-2\alpha a}$ окажется за барьером и

улетит далее вдоль оси х.

$$\underbrace{j_{\text{отр}}}_{\text{Е}} \underbrace{j_{\text{пад}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{\text{Е}} \underbrace{j_{\text{пад}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{пад}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{пад}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{пад}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{пад}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{\text{и}} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{\text{и}} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{\text{и}} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{\text{и}} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{\text{и}} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{\text{и}} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{\text{и}} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{\text{и}} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{\text{и}} \underbrace{j_{\text{пр}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{п}}}_{\text{и}} \underbrace{j_{\text{п}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{п}}}_{\text{и}} \underbrace{j_{\text{п}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{п}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{п}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{п}}}_{\text{и}} \underbrace{j_{\text{п}}}_{\text{и}} \underbrace{j_{\text{п}}}_{\text{и}} \underbrace{j_{\text{п}}}_{0 \alpha} \underbrace{j_{\text{n}}}_{0 \alpha}$$

7.7. Туннельный эффект. Эмиссия электронов из металла*



<u>Туннельным эффектом</u> называется прохождение микрочастицы через потенциальный барьер в том случае, когда полная энергия *E* частицы меньше высоты барьера (рисунок а). В классической теории это невозможно. Если классическая частица с энергией $E = m v^2/2$, скользя без трения, повстречает горку высоты $h > v^2/2g$ (рисунок б), то, поднявшись до точ-

ки поворота П, в которой вся ее кинетическая энергия перейдет в потенциальную, частица повернет обратно. Кинетическая энергия E - U не может быть отрицательной, и потенциальный барьер U = mgh > E не будет преодолен.

Тем не менее, на практике квантовый туннельный эффект встречается так часто, что о его природе обычно не задумываются.

Пример: металл, находясь в воздухе, покрывается окисной пленкой, которая является хорошим диэлектриком. Такая пленка образует потенциальный барьер, так как энергия, которую должны приобрести свободные электроны для преодоления слоя диэлектрика, намного больше энергии электронов в металле. Поэтому по классическим законам при включении окисленной вилки в розетку ток в ней возникнуть не может. Но он возникает благодаря туннельному переходу электронов сквозь окисную пленку.



Если потенциальный барьер имеет произвольную форму, то разобьем его на *n* бесконечно узких прямоугольных барьеров шириной Δx и высотой U(x) каждый (рисунок слева). Вероятности независимых событий –

преодоления каждого из узких барьеров – перемножаются: $D = D_1 D_2 ... D_n$. Показатели экспонент в сомножителях при этом складываются и при $\Delta x \rightarrow dx$ дают интеграл:

$$D = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - E)} \, dx\right) - - \text{ это вероятность туннельного преодоления падающей микрочасти-$$

цей с массой *т* и энергией *Е* барьера произвольной формы. Записанная формула является приближенной, так как получена с точностью до постоянного множителя, зависящего от формы барьера. Но главным результатом будет экспоненциальная зависимость коэффициента прохождения *D* от толщины и высоты барьера и от массы частицы.

Пример: туннельный микроскоп. Перемещая источник электронов на очень малом

удалении $a \sim 10^{-9}$ м над поверхностью вещества, измеряют ток *I*, текущий через источник за счет тупнельного перехода электронов. Вероятность перехода, т.е. величина тока / очень сильно (экспоненциально) зависит от расстояния а. По изменению тока можно найти изменение $\Delta a \leq 10^{-10}$ м и определить расположение атомных слоев. Таким образом можно определить размеры и расположение атомов в отдельных молекулах.

 \oplus $\overline{\oplus \oplus} \oplus \oplus \oplus \oplus \oplus \oplus \oplus \oplus$ атомные слои `ток Т

Используемый термин "туннельный эффект" может создать неверное впечатление о точечной микрочастице, преодолевающей потенциальный барьер сквозь некий "туннель". Это неверно. Квантовая теория – уравнение Шредингера – описывает не точечную частицу, а "размазанное" в пространстве "облако" плотности вероятности ее обнаружения $|\psi(x)|^2$. Если часть этого "облака" оказывается позади барьера, то для микрочастицы существует конечная вероятность оказаться за барьером.



Если рассматривать частицу как точечный объект, уменьшая неопределенность ее координаты Δx , то возрастает неопределенность импульса и энергии. Тогда частица может оказаться в виртуальном состоянии и изменить свою энергию на величину $\Delta E \ge U_0 - E$. Это происходит в результате поглощения виртуального фотона, испускаемого частицами, создающими потенциальный барьер. Налетающая частица окажется над барьером ширины а, как изображено на рисунке. Если время существования частицы в таком состоянии $\Delta t > a/c$ (с – скорость света), то она может успеть "перелететь" через барьер и вернуться в состояние с прежней энергией Е.

Полная энергия Е микрочастицы при туннельном переходе измениться не может.

Соотношение неопределенностей позволяет оценить ширину потенциального барьера, для которого возможен туннельный эффект: $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar \ge (U_0 - E) a/c$ или $a \le c\hbar/(U_0 - E)$.

Пример: разрешенные энергетические уровни электрона в атомах имеют величину $|E| \sim 10$ эВ. Межатомное расстояние в кристаллической решетке $d \approx 10^{-10}$ м « $c \hbar / |E|$. Поэтому электроны, связанные с атомным ядром кулоновским взаимодействием $U_{\rm kym} \sim -k Z e^2/r$, могут легко переходить из одного атома (иона) в другой, не вырываясь из атома и не становясь свободными, а за счет туннельного эффекта.





электрона из метапла А

Рассмотрим явление холодной эмиссии или вырывания электронов из металла внешним электрическим полем с напряженностью Е. Однородное поле, направленное против оси x, как показано на рисунке слева, создает потенциал $\phi(x) = \int_{1}^{\infty} E dx = E x$. Потенциальная энергия электрона с отрицательным зарядом –е в таком поле убывает с рос-

том *х* линейно: $U(x) = U_0 - e \varphi(x) = U_0 - e Ex$. Возникает треугольный потенциальный барьер, толщина которого, как видно из рисунка, определяется величиной работы выхода $=U_0 - E$ Вероятность туннельного прохождения через такой барьер или вероятность выры-

вания электрона из металла
$$D \sim \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\int_{0}^{x_2}\sqrt{A_{\text{вых}}-e \to x} \, dx\right) = \exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar e \to x}A_{\text{вых}}^{3/2}\right)$$
 очень мала. Для металла с

 $A_{\text{вых}} = 2$ эВ получаем $D \sim 4 \cdot 10^{-9}$ при $\text{E} = 10^9$ В/м. Однако при нагревании металла к энергии электрона в нем добавляется тепловая энергия $3k_{\rm E}T/2$. Электроны оказываются ближе к вершине потенциального барьера и вероятность его преодоления резко увеличивается. Поэтому катоды в работающих электронных лампах обязательно нагревают.

7.8. Микрочастица в одномерной потенциальной яме прямоугольной формы

Уравнение Шредингера позволяет одновременно найти волновую функцию $\psi(\vec{r})$ и разрешенные значения энергии E_n для микрочастицы, находящейся в поле с любой потенциальной энергией $U(\vec{r})$. Для этого при решении уравнения Шредингера обязательно надо задать граничные условия для функции ψ или для плотности вероятности обнаружения частицы $|\psi|^2$.

Наиболее просто уравнение Шредингера решается в том случае, когда частица находится в прямоугольной потенциальной яме ширины a с бесконечными стенками. Так как внутри ямы U = 0, то в одно-

мерном случае уравнение Шредингера принимает вид $\frac{d^2\psi}{dr^2} + k^2\psi = 0$, где $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ и имеет решение

(1

 $\psi(x) = A \sin(k x + \alpha)$. Вылететь из ямы частица не может, и плотность вероятности ее обнаружения $|\psi|^2$ вне ямы и на стенках ямы равна нулю. Это дает граничные условия для функции ψ :

$$\begin{cases} \psi |_{x=0} = A \sin \alpha = 0, \text{ откуда } \alpha = 0; \\ \psi |_{x=a} = A \sin k \, a = 0, \text{ откуда } k \, a = \pi n \text{ или } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{\pi n}{a}, 1, 2, 3... \end{cases}$$

Поэтому энергия микрочастицы с массой *m*, находящейся в потенциальной яме ширины *a*, может принимать

только отдельные разрешенные значения $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m a^2}$, где n = 1, 2, 3, Каждому значению энергии E_n соответству-

ет своя волновая функция, описывающая состояние частицы: $\psi_n(x) = A \sin(\pi n x/a)$. Неизвестную постоянную A можно

найти из условия нормировки: $\int_{0}^{a} |\psi_n|^2 dx = A^2 \int_{0}^{a} \sin^2 \left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx = \frac{A^2 a}{2} = 1.$ Эта постоянная $A = \sqrt{2/a}$ будет одинаковой для $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right).$

всех функций

Плотность вероятности обнаружения частицы в разных точках потенциальной ямы в состояниях с разной энергией изображена на рисунке справа. Если классическая частица в подобной яме движется с постоянной скоростью, и вероятность ее обнаружения во всех точках одинакова, то для микрочастицы это не так. В некоторых точках вероятность обнаружить микрочастицу максимальна, а в некоторых (например, вблизи стенок потенциальной ямы) – равна нулю.



/\U(x)

ΛU

7.9. Квантовый гармонический осциллятор

Другим примером квантовой системы будет ион кристаллической решетки твердого тела, совершающий тепловые колебания. Но свойствами гармонического осциллятора обладает также любая микрочастица, совершающая **малые колебания** возле положения равновесия в потенциальной яме произвольной формы, где зависимость потенциальной энергии от смещепотенциальной яме произвольной формы, где зависимость потенциальной энергии от смещения *x* из положения равновесия можно считать параболической функцией $U(x) = Kx^2/2$. Если *m* – масса частицы (иона), то циклическая частота его колебания в таком поле $\omega = \sqrt{K/m}$ Та m – масса частицы (иона), то циклическая частота его колебания в таком поле $\omega = \sqrt{K/m}$ Такая система называется одномерным квантовым гармоническим осциллятором и описывается стационар-

ным уравнением Шредингера $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \psi = 0$. Решение уравнение Шредингера дает

спектр разрешенных значений энергии квантового гармоническог



$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots.$$

Эти энергетические уровни находятся на одинаковом расстоянии $\Delta E = E_{n+1} - E_n = \hbar \omega$ друг от друга. Поэтому при переходе из одного разрешенного состояния в другое осциллятор может испускать энергию только отдельными квантами-фотонами с энергией $E_{\text{фотона}} = E_{n'} - E_n = (n'-n)\hbar\omega$. Наи-

меньшая энергия испускаемых фотонов равна ħω, где ω – собственная частота колебаний осциллятора. Тем самым мы объяснили гипотезу Планка – фотоны теплового излучения испускаются с кратными частотами колеблющимися атомами кристаллической решетки. Но приведенный результат позволяет сделать еще один вывод:

Частицы классического газа при температуре T = 0 К должны находиться в покое. Квантовая теория это запрещает – нельзя одновременно получить и координату покоящейся частицы и ее определенный (нулевой) импульс. Поэтому все процессы при низких температурах описываются не классической, а квантовой теорией. Если охладить металл до T = 0 К, колебания атомов в нем не прекратятся. Одномерный осциллятор будет при этом иметь минимальную энергию $E_0 = \hbar \omega/2$ и уменьшить эту энергию не может.

Замечание: самый нижний разрешенный уровень энергии называется основным. И осциллятор, и электрон в атоме водорода, и частица в потенциальной яме стремятся занять этот самый низший свободный (с учетом принципа Паули) энергетический уровень. Уровни, расположенные выше и соответствующие большим значениям энергии называются возбужденными. Частица остается в возбужденном состоянии очень недолго, <10⁻⁸ с, и переходит в основное состояние с минимальной энергией, испуская фотон. На приведенном выше рисунке Е0 – энергия основного состояния (основной уровень энергии); Е1 – энергия первого возбужденного состояния (первый возбужденный уровень энергии); E₂ – энергия второго возбужденного состояния (второй возбужденный уровень энергии) и т.п.

7.10. Тепловые колебания кристаллической решетки. Представление о фононах

Ионы кристаллической решетки сильно взаимодействуют друг с другом и не могут колебаться независимо. В таком случае какие-то ионы сближались бы на очень малые расстояния, а другие – удалялись бы друг от друга.

Колебания ионов кристаллической решетки могут происходить только согласованно, образуя волну смещения. Такие волны называют нормальными. Они образуют волны упругих деформаций в твердом теле (волны звуковых колебаний). На рисунке показана нормальная волна с волновым вектором \vec{k} , распространяющаяся вдоль оси z. Она может иметь три поляризации. В волнах с двумя поперечными поляризациями смещение ионов перпендикулярно направлению \vec{k} и происходит вдоль осей x и y. В волне <u>с продоль-</u> ной поляризацией ионы колеблются вдоль оси z, совпадающей с направлением у распространения волны. Частоты таких волн $\omega_k \leq 10^{13} \, \mathrm{c}^{-1}$ много меньше частот



видимого света $\omega \sim 10^{15} \div 10^{16} \text{ c}^{-1}$. Поэтому такие колебания назвали <u>акустическими</u>.

Если одному из колеблющихся ионов сообщить порцию энергии, то эта энергия сразу же перераспределяется между всеми колеблющимися с одной согласованной частотой ω_k ионами, увеличивая амплитуду (энергию) всей упругой волны. В квантовой теории такая колеблющаяся совместно система ионов является одним квантовым гармоническим осциллятором, энергия которого может принимать только отдельные разрешенные значения $E_n = \hbar \omega_k (n + 1/2)$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Колебания ионов решетки с минимальной энергией $E_0 = \hbar \omega_k/2$, сохраняются даже при температуре T = 0 К.

Энергия такой системы может увеличиваться только порциями $\Delta E = \hbar \omega_k$. С точки зрения корпускулярноволнового дуализма, увеличение энергии волны с частотой ω_k и волновым вектором \vec{k} эквивалентно в квантовой теории появлению частицы с энергией $E = \hbar \omega_k$ и импульсом $\vec{p} = \hbar \vec{k}$. Такие реально не существующие частицы называют квазичастицами. Очень удобно всевозможные сложные коллективные упругие колебания ионов решетки заменить на простой газ квазичастиц с энергией *E* = $\hbar \omega_k$, которые назвали <u>фононами</u> по аналогии с фотоном ("фото"-свет, "фоно"-звук). Так же, как электроны взаимодействуют с фотонами, ионы кристаллической решетки будут взаимодействовать с фононами, поглощая и испуская их согласно законам сохранения энергии и импульса.

Еще раз напомним, что поглощение или рождение фонона с частотой ω_k меняет энергию не одного из колеблющихся ионов решетки, а всей решетки в целом, и означает ослабление или усиление в решетке волны упругих деформаций с частотой ω_k. Число фононов пропорционально интенсивности такой волны или ее энергии. Поэтому целое число *n* в формуле $E_n = \hbar \omega_k (n+1/2)$ можно считать числом фононов с частотой ω_k в твердом теле. При T = 0 К, когда в решетке существуют только нулевые колебания с энергией $E_0 = \hbar \omega_k / 2$, фононы отсутствуют.

В твердом теле одновременно существует огромное число волн (фононов) с разными частотами ω_k и разными поляризациями. Приблизительный график зависимости функции плотности $dn_{\rm b}/d\omega_k$ фононов от частоты ω_k показан на рисунке. Среднюю энергию фонона с частотой ω_k можно вычислить по той же формуле, по которой в разделе 25.4. вычислялась



средняя энергия фотонов теплового излучения при получении формулы Планка: $|\langle E_{\phi} \rangle =$

Заметим, что в твердом теле могут существовать и другие типы волн, например – спиновые волны в ферромагнетике, когда во внешнем магнитном поле с напряженностью $\vec{H}_{\rm BH}$ в каждой точке среды вокруг направления $\vec{H}_{\rm BH}$ прецессирует вектор намагниченности среды $\vec{J} = \sum_{\text{вед}V} \vec{p}_{ms}$, образо- $\mathbf{J} \leftarrow \mathbf{J} \leftarrow$

ванный суммой спиновыми магнитных моментов ионов в единице объёма среды. При этом ориентация спинов плавно меняется на угол $\alpha = k\vec{r}$, пропорциональный расстоянию r между участками среды.

С точки зрения квантовой теории спиновая волна намагниченности может быть заменена квазичастицеймагноном, имеющей энергию $E_{\rm M} = \hbar \omega$ и квазиимпульс $\vec{p}_{\rm M} = \hbar \vec{k}$.

Колебания плотности заряженной плазмы свободного электронного газа в металлах также образуют волны, которые заменяют на газ квазичастиц-экситонов.



электроны

 $\hbar \omega_k$

8. ЭЛЕКТРОНЫ В КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СРЕДАХ.

8.1. Многоэлектронная система. Кулоновская и обменная энергия. Энергия связи.

В одноэлектронном атоме состояние электрона с зарядом -e и массой m_e , находящегося на расстоянии r от ядра с зарядом +Ze, где Z – число протонов в ядре, описывается стационарным уравнением Шредингера $\Delta \psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} (E - E_{\text{пот}}) \psi = 0$, где $E_{\text{пот}} = -\frac{kZe^2}{r}$ - потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром.

Решая это уравнение, можно найти спектр разрешенных значений энергии электрона: $E_n = -\frac{k^2 Z^2 m_e e^4}{2\hbar^2 n^2} = \frac{E_1}{n^2}$, где

n = 1, 2, 3,... - главное квантовое число. Этот спектр совпадает с тем, который был получен в разделе 27.2 с помощью квантового постулата Бора.

В многоэлектронном атоме, в котором число электронов Z равно числу протонов в ядре, надо учесть кулоновскую потенциальную энергию взаимодействия всех электронов не только с ядром, но и

их энергию взаимодействия друг с другом:
$$E_{\text{пот}} = -\sum_{i=1}^{Z} \frac{kZe^2}{r_i} + \sum_{i,j}^{Z} \frac{ke^2}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}$$
.

В этом случае из уравнения Шредингера следует, что записанная выше энергия электрона $E_n = E_1/n^2$ изменится на величину $\left[E_{\text{доп}} = \frac{K \pm A}{1 \pm C} \right]$, где K – кулоновская потенциальная энергия взаимодействия элек-

тронных облаков, размазанных вблизи ядра с плотностью $|\psi|^2$. Плотность электрического заряда в каждом электронном облаке равна $-e|\psi|^2$.

А – обменная энергия, которая возникает только при решении уравнения Шредингера и не имеет классического аналога. Обменная энергия появляется только в том случае, когда электронные облака соседних электронов перекрываются. Поправочная константа С пропорциональна величине области их перекрывания. Знак "+" в этой формуле соответствует однонаправленным спинам соседних электронов (одинаковые проекции спина на выделенную ось), а знак "-" противоположно направленным спинам.

Причина появления обменной энергии заключается в том, что в заштрихованной на правом рисунке области перекрывания электронных облаков І и ІІ электрон одновременно принадлежит обоим электронным облакам. Если первоначально он принадлежал левому атому и имел потенциальную энергию $E_{\text{пот}} = -ke^2/r$, то в двухатомной системе (см.рисунок) к этой энергии добавляется энергия его взаимодействия со вторым ионом и энергия взаимодействия

электронные

двух ионов, расположенных на расстоянии *R*: $E_{\text{пот доп}} = \frac{ke^2}{R} - \frac{ke^2}{|\vec{r} - \vec{R}|}$. Величина этой добавки отрицательна в заштрихованной области, где $\left| \vec{r} - \vec{R} \right| < R$. Поэтому величина $E_{\text{доп}} = \frac{K \pm A}{1 \pm C}$ оказывается отрицательной.

Энергия электрона, полученная при решении уравнения Шредингера уменьшается, и состояние с перекрывающимися электронными облаками оказывается энергетически более выгодным. Знак "±" в этой формуле будет соответствовать параллельным или антипараллельным спинам соседних атомов.

Перекрывающиеся электронные облака соседних атомов решетки называются связующей орбиталью. Атомам энергетически выгодно сблизиться так, чтобы электронные облака их внешних подоболочек перекрывались и образовывали связующие орбитали. Но при дальнейшем сближении $R \rightarrow 0$ растет кулоновское отталкивание ионов и их внутренних электронных подоболочек. Кроме того, при малом расстоянии R должны перекрываться внутренние полностью заполненные электронами подоболочки. А так как электроны из таких подоболочек имеют одинаковые квантовые числа *n*, *l, m* и о, то при перекрывании нарушается принцип запрета Паули – в одной системе окажутся два электрона с одинаковыми значениями квантовых чисел. Чтобы этого не произошло, должны возникать дополнительные обменные силы, соответствующие обменному взаимодействию А', отталкивающие сближающиеся внутренние подоболочки.

E/ R

В результате получим зависимость энергии системы из двух соседних ионов и связывающего их электрона в связующей орбитали, а также зависимость кулоновского К, обменных A и A' интегралов и энергии электрона E от расстояния R между ионами системы, которая показана на рисунке.

Система устойчива, если соседние ионы окажутся в узлах кристаллической решетки на таком расстоянии *d* друг от друга, которое соответствует минимуму энергии *E*. Энергия Е_{связи}, соответствующая этому минимуму, называется энергией связи. Если сообщить ее взаимодействующим ионам, то связь между ними разрывается.





8.2. Типы межатомных связей: ковалентная, металлическая, ионная

Вид связующих орбиталей и свойства кристаллической решетки сильно зависят от того, из каких атомов она образуется. В атомах из III, IV, и последующих групп таблицы Менделеева внешние электроны находятся на p, d, f – подоболочках, связующие орбитали которых очень сильно вытянуты в определенных направлениях и образуют узкие области перекрытия электронных облаков внешних или валентных электронов. <u>Валентность</u> атома z – это число внешних электронов, электронные облака которых перекрываются и образуют межатомные связи (связующие орбитали). На рисунке это схематически показано для решетки углерода С



 $(1s^2 2s^2 2p^2)$, в которой каждый из атомов С связан с четырьмя соседними атомами, т.е. имеет

четыре валентных электрона. Половина расстояния d между центрами атомов C в такой решетке, соответствует минимуму энергии и называется <u>атомным радиусом</u> $r_a = d/2$. Образованную таким образом межатомную связь называют <u>ко</u>валентной связью.



Вид орбиталей изменяется, если начинают сближаться атомы элементов из I или II группы таблицы Менделеева, на внешней оболочке которых находятся *s*-электроны, электронные облака которых сферически симметричны.

Как видно из левого рисунка, эти облака перекрываются так, что между атомами

образуется одно сплошное электронное облако. Вероятность обнаружения $\left|\psi(\vec{r}\,)^2\right|$ каждо-

го электрона, принадлежащего к этому облаку, заштрихованному на рисунке, отлична от нуля в любой точке кристаллической решетки. Говорят, что электроны из внешних атомных оболочек обобществляются, коллективизируются. Они уже не принадлежат отдель-

ному атому, с вероятностью $|\psi|^2$ их можно найти в любой точке кристалла.

Обобществленный электрон с некоторой вероятностью можно найти в любой точке электронного облака, т.е. можно сказать, что такие электроны могут перемещаться по всему объему кристалла и обладают многими свойствами свободных частиц. Тем не менее, они взаимодействуют с полями ионов и других электронов, образуя одну квантовую систему, в которой, в соответствии с принципом запрета Паули, энергии отдельных электронов не могут изменяться произвольным образом. Поэтому правильнее эти электроны называть квазисвободными.

Такая разновидность ковалентной связи называется <u>металлической связью</u>. <u>Металл</u> – это кристаллическая решетка из положительных ионов, окруженных со всех сторон облаком свободных электронов. Связана эта решетка не электрическими, а <u>обменными силами</u> квантовой природы, сближающими ионы решетки до межатомных расстояний *d*, соответствующих минимуму суммарной кинетической, кулоновской и обменной энергии взаимодействия.



Однако физические свойства сред с ковалентной и металлической решетками различны. Металлы из-за наличия квазисвободных электронов проводят электрический ток. Кроме того, электронное облако изотропно, поэтому небольшая деформация решетки не изменяет металлических связей. Они не направлены. Это приводит к способности металлов деформироваться не разрушаясь (свойство <u>пластичности</u>).

В ковалентной решетке смещение атомов привело бы к деформации заштрихованных на рисунке для углерода С перекрывающихся электронных облаков, а они должны оставаться симметричными (одинаковыми). Поэтому кристаллическая среда с ковалентными межатомными связями должна иметь значительную <u>твердость</u> (сопротивление деформации) и <u>хруп</u>-

кость (при сильной внешней нагрузке связи разрушаются, и решетка разламывается). К тому же внешние электроны в такой решетке локализованы в заштрихованных областях и не могут создавать электрический ток.

Возможны другие типы межатомных связей, приводящие к появлению кристаллической решетки. Это, прежде всего, <u>ионная связь</u>, возникающая между сближающимися атомами разного сорта (металла и неметалла). Например, внешнему валентному 3*s*-электрону натрия энергетически выгодно переместиться на нижележащий недозаполненный уровень энергии 3*p* хлора, как показано на рисунке справа. Возникающие ионы будут притягиваться друг к другу кулоновски-



ми силами, выстраивающими их в решетку. Надо учитывать влияние полей всех ионов решетки и с учетом этих полей результирующую кулоновскую силу $F_{\rm Kyn}$ притяжения двух соседних ионов можно за-

писать как
$$F_{\text{кул}} = \alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$
, где r – расстояние между ионами, Γ

а α – <u>постоянная Маделунга</u>, которая различна для разных решеток. Для NaCl она равна α = 1,748.

Зависимость эффективной потенциальной энергии взаимо-

действия двух соседних ионов в решетке ионных кристаллов, изображенная на правом рисунке, аналогична той, что была приведена для ковалентной связи, и позволяет определить расстояние *d* между соседними ионами, соответствующее минимуму энергии.



0

В биологических и химических структурах часто встречается водородная связь. Это ковалентно-ионная связь, возникновение которой объясним на примере решетки льда. В молекулах воды H_2O , из которых строится эта решетка, имеются две связующие орбитали, соответствующие перекрыванию электронных облаков водорода и кислорода. Атом водорода имеет один электрон и может образовать только одну связующую орбиталь. При этом наибольшая плотность электронного облака с отрицательным зарядом в такой орбитали наблюдается вблизи иона O^- . Из-за возникшего разделения электрического заряда появляется ионная связь между ионом H^+ и ионом кислорода O^- в соседней молекуле воды. В такой решетке каждый атом $O^$ участвует в четырех связях с ионами H^+ из соседних молекул H_2O , образуя кристаллическую решётку льда.



Водородная связь менее прочна, чем ковалентная или ионная, но достаточно сильна (лед не просто разрушить механически).

8.3. Образование энергетических зон. Проводники, полупроводники, диэлектрики

Перекрывание электронных облаков соседних атомов в решётке твердого тела приводит к тому, что отдельный электрон с плотностью вероятности $|\psi|^2$ может оказаться за пределами своего атома в любой точке системы из *N* атомов. Его волновая функция ψ не равна нулю во всём объеме пространства, занятого этими атомами. Все атомы совместно (вся кристаллическая решетка) становятся одной квантовой системой. А так как по принципу Паули в одной квантовой системе не могут находиться два тождественных электрона, имеющих одинаковую энергию, то каждый дискретный уровень энергии электрона в изолированном атоме, определяемый значениями квантовых чисел *n*, *l*, *m* и σ , должен расщепиться на *N* уровней различающихся величиной энергии. Можно сказать, что это расщепление происходит из-за взаимодействия электрона с ионами и электронами из соседних атомов.

Расщепление уровней тем сильнее, чем больше перекрытие электронных облаков. Оно растет при сближении атомов, т.е. при уменьшении расстояния *d* между ними. Поэтому заметно расщепляются только уровни энергии электронов, находившихся на внешних подоболочках сблизившихся атомов, так как их электронные облака перекрываются в наибольшей степени. Расщепление уровней энергии электронов из внутренних электронных подоболочек очень мало.

Ширина расщепленной структуры достигает $\Delta E \sim 1$ эВ. Если в кристалле твердого тела находится $N \sim N_{\text{Авогадро}} = 6 \cdot 10^{23}$





атомов, то расстояние между соседними расщепленными уровнями ничтожно мало: $\delta E \sim \Delta E/N \sim 10^{-23}$ эВ. Поэтому полосы расщепленных из-за взаимодействия с соседними атомами уровней энергии на энергетической диаграмме называют разрешенными энергетическими зонами. Полосы значений энергии между ними – запрещенные энергетические зоны. Квантовая теория не позволяет электрону иметь энергию из запрещенной зоны и разрешает занять один из расщепленных энергетических уровней в разрешенной энергетической зоне.

из N атомов Из-за перекрытия электронных облаков по-прежнему возникают связующие орбитали, и атомы выстраиваются на определенном расстоянии *d*, соответствующем минимуму энергии. На следующем

рисунке показано, как при сближении атомов Na $(1s^22s^22p^23s^1)$ перекрываются потенциальные барьеры





кулоновским взаимодействием внешних 3*s*электронов с полями ионов. Уровни энергии, на которых находятся 3*s*-электроны, оказываются над барьерами. 3*s*-электроны не удерживаются внутри потенциальных ям и становятся квазисвободными. Их расщепленные уровни энергии образуют разрешенную энергетическую зону.

Оказывается, что очень многие физические свойства сред зависят от поведения именно таких внешних электронов, и, прежде всего, от того, как они заполняют образующиеся разрешенные энергетические зоны.

Электроны стремятся заполнить низшие разрешенные уровни энергии в разрешенных энергетических зонах. Но в соответствии с принципом запрета Паули: на одном энергетическом уровне может находиться не более одного электрона (квантовой системой, для которой применяется этот принцип, будет вся кристаллическая решетка). При этом наивысшую полностью заполненную энергетическую зону часто называют <u>валентной зоной</u>, а лежащую над ней пустую или частично заполненную разрешенную энергетическую зону – <u>зоной проводимости</u>.

Рассмотрим две среды, в которых электроны по-разному заполняют зону проводимости. В первой среде (диаграмма б) разрешенная энергетическая зона заполнена квазисвободными электронами частично. При температуре T = 0 К электроны заполняют все возможные уровни энергии с наименьшими значениями *E*. Верхний занятый электроном уровень энергии E_{ϕ} называется <u>уровнем Ферми</u>. Все уровни энергии ниже уровня Ферми

 E_{Φ} в зоне проводимости заполнены, а выше E_{Φ} – пусты. Включим электрическое поле с

напряженностью \vec{E} , действующее на квазисвободные электроны. Изменить свой импульс, т.е. двигаться против поля и создавать электрический ток, большая часть квазисвободных электронов не может. При этом должна измениться их кинетическая энергия $E = \vec{p}^2/2m_e$, и электроны должны перескочить на другой, уже заполненный энергетический уровень, что запрещено принципом Паули. Менять свою скорость и направление движения могут только электроны, находящиеся вблизи уровня Ферми $E = E_{\phi}$, рядом с

а) диэлектрик б) проводник АЕ проводимости АЕ Проводимости Салана Саланана Саланана Салана Салана Салана Салана Салана Салана Салана Салана Салана Саланана Салана Саланана Салан

которой имеются свободные энергетические состояния. При включении внешнего электрического поля эти электроны меняют направление движения, т.е. меняют свою кинетическую энергию, "перескакивая" на незаполненные уровни энергии выше уровня Ферми. При этом они создают электрический ток и среда является <u>проводником</u>.

У проводников зона проводимости заполнена электронами частично.

Во второй среде (диаграмма а) все уровни энергии в разрешенной энергетической зоне заполнены. Принцип запрета Паули не позволяет электрону постепенно изменить свою энергию (а вместе с этим и скорость) и оказаться на занятом другим электроном энергетическом уровне. Такая среда, несмотря на то, что внешние электроны в ней квазисвободны, не будет проводить электрический ток. Она является <u>диэлектриком</u>.

У диэлектриков зона проводимости, лежащая выше заполненной валентной зоны, пуста.

Ширина запрещенной зоны, разделяющей зону проводимости и валентную зону, велика: $\Delta E_3 = 5 \div 10$ эВ. Как правило, в диэлектриках электроны из валентной зоны остаются связанными с атомами (ионами) и не могут перемещаться по решетке. Для того, чтобы валентный электрон вырвался из связующей орбитали и перешел в пустую зону проводимости, отделенную запрещенной энергетической зоной ширины $\Delta E_3 > 1$ эВ, ему надо приобрести тепловую энергию

$k_{\rm B}T > \Delta E_3$. Это соответствует температурам $T \sim \Delta E_3/k_{\rm B} > 10^4$ К !

Если эта ширина мала ($\Delta E_3 < 1$ эВ), то небольшая часть электронов из валентной зоны может при нагревании приобрести тепловую энергию, вырваться из иона и стать свободными, скачком преодолев запрещенную зону и перейдя в зону проводимости. Такая среда начинает пропускать электрический ток, но её проводимость очень мала, так как число вырвавшихся из валентной зоны электронов невелико. Подобные среды, являющиеся диэлектриками при T = 0 К, называют <u>полупроводниками</u>.

8.4. Распределение Ферми-Дирака и функция Ферми

Оказывается, что физические свойства твердых тел определяются электронами из валентной зоны и зоны проводимости. Классическое распределение Максвелла-Больцмана по величинам энергии *E*,

$$dn_{\rm MB} = {\rm const} \cdot \sqrt{E} e^{-\frac{E}{k_{\rm B}T}} dE$$
,

полученное для частиц идеального газа в разделе 9.7, не годится для газа электронов. Действительно, при T = 0 K эта формула дает $\exp(-E/k_{\rm B}T) \neq 0$ только при E = 0, т.е. все частицы газа, подчиняющиеся классическому распределению должны находиться на одном энергетическом уровне E = 0, что противоречит принципу запрета Паули.

Правильно будет для газа из микрочастиц применять функции распределения с учетом квантовой теории:

газ из любых частиц с полуцелым спином (это газ из электронов, например) описывается <u>распреде-</u><u>лением Ферми-Дирака.</u>

Оно было получено в 1926 г. Э.Ферми и П.А.М.Дираком и имеет вид:

$$dn_{\Phi,\Pi} = \frac{(2m_e)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E} f_{\Phi}(E) dE \, ,$$

где m_e – эффективная масса квазисвободного электрона, которая из-за взаимодействия с другими частицами решетки может отличаться от массы свободного электрона, $dn_{\Phi \Lambda}$ – число электронов в единице объема с энергиями от E до

E + dE, $f_{\phi}(E) - \phi$ ункция, которая называется <u>функцией Ферми</u> и имеет вид: $f_{\phi}(E) = f_{\phi}(E)$

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{E-E_{\phi}(T)}{k_{\rm B}T}\right)+1}$$

Её физический смысл: $f_{\phi}(E)$ – это среднее значение числа электронов, имеющих энергию *E*, что одновременно

является вероятностью заполнения электроном разрешенного уровня энергии *E*. $E_{\phi}(T)$ – энергия, которая при T = 0 *K* называется энергией Ферми или уровнем Ферми $E_{\phi} = E_{\phi}(T = 0)$.

При T > 0 К величину $E_{\phi}(T)$ называют <u>химическим потенциалом</u> – это энергия, которую надо сообщить рассматриваемой системе, чтобы при неизменной температуре T добавить к электронному газу еще одну частицу – электрон.

Как видим, распределение Ферми-Дирака подчиняется квантовому принципу Паули: $0 \le f_{\phi}(E) \le 1$. На одном уровне *E* не может находиться более одного электрона. При этом вероятность заполнения уровня с энергией $E = E_{\phi}(T)$ равна $f_{\phi}(E_{\phi}) = 1/2$.

Газ из частиц с целым спином (например – газ фотонов) подчиняется другому распределению Бозе-Эйнштейна:

 $\overline{dn_{\rm E\Im}} = {\rm const} \cdot \sqrt{E} f_{\rm E\Im}(E) dE$, где функция $f_{\rm E\Im}(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E}{k_{\rm E}T}\right) - 1} = \langle n \rangle$ - среднее число частиц газа, имеющее энергию

E. Как видим, этот газ не подчиняется принципу Паули, число $\langle n \rangle$ может быть любым.

8.5. Свойства электронного газа при нулевой температуре и температуре, отличной от нуля

Электронный газ называется <u>вырожденным</u>, если число частиц газа сравнимо с числом квантовых состояний (уровней энергии), которые они могут занимать. Распределение Ферми-Дирака описывает вырожденный электронный газ.

При $T = 0 \ K$ графики функции Ферми $f_{\phi}(E)$ и <u>функции плотности за-</u> полнения энегетического уровня dn/dE изображены на рисунке справа:

$$f_{\phi}(E)\Big|_{T=0} = \begin{cases} 1 & \text{при } E \leq E_{\phi} \\ 0 & \text{при } E > E_{\phi}, \end{cases}$$



т.е. ниже уровня Ферми E_{ϕ} вероятность заполнения энергетического уровня 0^L

 $f_{\phi}(E) = 1$, и все разрешенные уровни энергии в энергетической зоне будут заполнены, а выше E_{ϕ} все уровни энергии свободны.

Величину E_{ϕ} можно определить, зная концентрацию квазисвободных электронов в решетке кристалла:

$$n = \int dn_{\Phi,\Pi} = \int_{0}^{E_{\Phi}} \frac{(2m_e)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E} \cdot 1 \cdot dE = \frac{\left(2m_e E_{\Phi}\right)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \text{ при } T = 0 \text{ K, откуда } \boxed{E_{\Phi} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(3\pi^2 n\right)^{2/3}}.$$

Принимая $n \sim 5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ (для металлов) и $m_e \approx 9, 1 \cdot 10^{-31}$ кг (масса свободного электрона) получим $E_{\phi} \sim 5$ эВ.

Различие значений энергии (уровня) Ферми E_{ϕ} в разных металлах вызвано различием концентраций *n* электронного газа в них и различием эффективных масс m_e электронов.

К свойствам вырожденного (квантового) электронного газа относится и то, что при T = 0 К квазисвободные

электроны не могут "остановиться" и имеют среднюю энергию $\langle E \rangle = \frac{\int_{\Phi}^{E_{\Phi}} E dn_{\Phi \Pi}(E)}{\int_{0}^{E_{\Phi}} dn_{\Phi \Pi}(E)} = \frac{\int_{\Phi}^{E_{\Phi}} E^{3/2} dE}{\int_{0}^{E_{\Phi}} \sqrt{E} dE} = \frac{3}{5} E_{\Phi} \sim 3 \text{ зB}.$

Можно также оценить среднюю скорость их движения при T = 0 К, как $\langle v \rangle = \sqrt{2 \langle E \rangle / m_e} \sim 10^6$ м/с.

При нагревании металлов до конечных, не очень больших температур T (например – до комнатной температуры и даже до температуры плавления металла), тепловую энергию $3k_{\rm b}T/2$ могут приобретать только электроны, заполнявшие уровни энергии в узком интервале $\Delta E \sim 2k_{\rm b}T$ вблизи уровня уровня Ферми. Остальным квазисвободным электронам это запрещено $E_{\rm c}$ принципом Паули. Только электроны из этой узкой полоски могут участвовать в создании электрического тока в металле и поэтому их можно назвать электронами проводимости. Концентрация этих электронов значительно меньше концентрации *n* всего электронного газа в металле и может быть найдена из соотношения пропорции

$$\frac{n_{\text{пров}}}{n} \approx \frac{k_{\text{Б}}T}{E_{\Phi}} \approx 0,01$$
 при $T \sim 300 \div 1000$ К



Т.е. только 1-2% частиц электронного газа в металлах могут двигаться направленно и создавать электрический ток.

Величина химпотенциала или энергии $E_{\oplus}(T)$ при нагревании вырожденного электронного газа в металлах меняется

незначительно:
$$E_{\phi}(T) = E_{\phi}(0) \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_{\rm b}T}{E_{\phi}(0)} \right)^2 \right)$$
 и так же **незначительно** в уз-
кой полоске $E_{\phi} - 2k_{\rm b}T < E < E_{\phi} + 2k_{\rm b}T$ изменяется функция Ферми $f_{\phi}(E)$.
Поэтому при приблизительных вычислениях с точностью 1-2% можно
принять $f_{\phi}(E) \Big|_{T=0} \approx \begin{cases} 1 \text{ при } E \le E_{\phi} \\ 0 \text{ при } E > E_{\phi} \end{cases}$ и при комнатных температурах использо-

вать для вырожденного электронного газа в металлах соотношения, полученные при температуре T = 0 К.

8.6. Условия вырожденности и невырожденности электронного газа

При дальнейшем росте температуры доля электронов, способных приобретать тепловую энергию, возрастает пропорционально ширине $\Delta E = 2k_{\rm B}T$ полосы вблизи уровня Ферми. Постепенно электроны переходят на лежащие все выше и выше энергетические уровни, рядом с которыми всегда найдется свободный уровень энергии, который может занять электрон, приобретая тепловую энергию $3k_{\rm B}T/2$. Влияние принципа запрета Паули на распределение электронов по уровням энергии ослабевает, и свойства электронного газа должны приближаться к свойствам газа классических частиц.

Электронный газ, в котором число частиц значительно превышает число возможных квантовых состояний (уровней энергии), называется невырожденным. Он должен подчиняться классическому распределению Максвелла-Больцмана.

Больцмана (рисунок в).



Легко увидеть, что распределение Ферми-Дирака превратится в распределение Максвелла-Больцмана, если выполняется условие $\exp\left(\frac{E-E_{\phi}}{k_{\rm E}T}\right) \gg 1$. Тогда в знаменателе формулы распределения Ферми-Дирака можно пренебречь

единицей и получить
$$\frac{dn_{\Phi\underline{\Pi}}}{dE} \sim \sqrt{E} \frac{1}{\exp\left(\frac{E-E_{\Phi}}{k_{\mathrm{B}}T}\right)+1} \sim \operatorname{const} \sqrt{E} \cdot e^{-\frac{E}{k_{\mathrm{B}}T}} \sim \frac{dn_{\mathrm{ME}}}{dE}$$

Это условие будет удовлетворено во всем интервале энергий Е зоны проводимости, если выполнено условие не-

 $-\frac{E_{\Phi}}{k_{\rm B}T}$ $\gg 1$. Его можно переписать в другом виде, вычисляя концентраexp вырожденности электронного газа:

цию невырожденного газа:
$$n = \int_{0}^{\infty} \frac{\left(2m^{*}\right)^{3/2}}{2\pi^{2}\hbar^{3}} \sqrt{E} f_{\Phi}\left(E\right) dE \approx \int_{0}^{\infty} \frac{\left(2m^{*}\right)^{3/2}}{2\pi^{2}\hbar^{3}} e^{\frac{E_{\Phi}-E}{kT}} \sqrt{E} dE$$
, откуда $\left[e^{-\frac{E_{\Phi}}{k_{\mathrm{B}}T}} = \frac{2}{n} \left(\frac{k_{\mathrm{B}}Tm_{e}}{2\pi\hbar^{2}}\right)^{3/2} \gg 1\right]$. Обратное условие $\left[\frac{2}{n} \left(\frac{k_{\mathrm{B}}Tm_{e}}{2\pi\hbar^{2}}\right)^{3/2} \ll 1\right]$ будет условием вырожденности электронного газа.

Условия вырожденности и невырожденности электронного газа можно применить к реальным средам:

- в металлах высока концентрация квазисвободных электронов $n \sim 10^{29} \div 10^{30}$ м⁻³, и расчет показывает, что при комнатных температурах T ~ 300 К выполняется условие вырожденности, т.е. квазисвободный электронный газ в металлах описывается распределением Ферми-Дирака;

– в собственных полупроводниках концентрация квазисвободных электронов значительно меньше $n \sim 10^{22} \div 10^{23}$ м⁻³, и при T ~ 300 К выполняется условие невырожденности, поэтому электронный газ в полупроводниках можно описать с помощью классического распределения Максвелла-Больцмана.

Для электронного газа в металлах использовать классическое распределение Максвелла-Больцмана невозможно. Его можно применить только при температурах $T \gg \pi \hbar^2 \left(\sqrt{2}n\right)^{2/3} / k_{\rm B} m_e \approx 10^5$ К, которые намного превышают темпера-

туру кипения среды.

9. СВОЙСТВА ПОЛУПРОВОДНИКОВ

9.1. Собственные полупроводники и их проводимость

Общая особенность всех полупроводников заключается в том, что их электрическое сопротивление, много большее, чем у металлов, может уменьшаться с ростом температуры. Объясним этот эффект для твердых кристаллических



полупроводников, атомы которых принадлежат IV группе таблицы Менделеева (Si,Ge). Их зона проводимости при T = 0 К пуста, как и у диэлектриков, но запрещенная зона полупроводника, отделяющая пустую зону проводимости от заполненной валентной зоны мала: $\Delta E_3 \le 1$ эВ. Такие среды называются собственными полупроводниками.

При нагревании T > 0 К часть валентных электронов получает энергию ~ $k_{\rm B}T$ от тепловых колебаний решетки, достаточную для преодоления запрещенной зоны. Электроны скачком валентные вырываются из связующей орбитали и оказыва-

ются в зоне проводимости (рисунок в). Но так как при комнатных температурах $k_{\rm b}T \ll \Delta E_3 = 1$ эВ, то число вырвавшихся из валентной зоны электронов очень мало. Концентрация квазисвободного электронного газа в собственных полупроводниках при $T \simeq 300$ К много меньше, чем у металлов $n_{\rm cBof} \sim 10^{15} \div 10^{20}$ м⁻³.



Поэтому электронный газ в собственном полупроводнике невырожден и подчиняется распределению Максвелла-Больцмана, а энергия Ферми имеет отрицательное значение $E_{\phi} < 0$, т.е. уровень Ферми расположен в запрещенной зоне ниже дна зоны проводимости E = 0. Ясно,

что в полупроводнике электрон не может иметь запрещенное значение энергии $E = E_{\phi}$ и заполнять уровень Ферми, который имеет смысл химпотенциала – минимальной энергии, которую надо сообщить свободному электрону, чтобы добавить его в полупроводник.

Так как при этом $\exp(-E_{\phi}/k_{\rm b}T) \gg 1$, то в знаменателе выражения для функции Ферми можно пренебречь единицей и вычислить концентрацию квазисвободных электронов в собственном полупроводнике по формуле

$$n_{e} = \frac{(2m_{e})^{3/2}}{2\pi^{2}\hbar^{3}} \int_{0}^{\infty} \sqrt{E} f_{\phi}(E) dE \simeq \frac{(2m_{e})^{3/2}}{2\pi^{2}\hbar^{3}} e^{\frac{E_{\phi}}{k_{\rm B}T}} \int_{0}^{\infty} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{k_{\rm B}T}} dE = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_{e}k_{\rm B}T}{\pi\hbar^{2}}\right)^{3/2} e^{\frac{E_{\phi}}{k_{\rm B}T}}$$

На каждый электрон – вырвавшийся из межатомной связи или остающийся в ней – кроме внешнего электрического поля $\vec{E}_{\text{внеш}}$ будет с силой $\vec{F}_{\text{реш}}$ действовать электрическое поле всех остальных электронов и ионов решетки. Уравнение движения электрона $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}_{\text{внеш}} + \vec{F}_{\text{реш}}$ можно переписать в виде $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}_{\text{внеш}}$, учитывая влияние поля решетки в эффективной массе m_e электрона.



На месте вырвавшегося из связующей орбитали электрона остаётся вакантное незаполненное состояние с положительным зарядом +e. Каждое такое состояние соответствует незаполненному энергетическому уровню валентной зоны. На это место за счет туннельного эффекта может перескочить электрон из соседнего иона. При этом вакантное место перемещается в противоположном направлении и его рассматривают как свободную квазичастицу-<u>дырку</u>, движущуюся в направлении внешнего поля $\vec{E}_{\text{внеш}}$ и имеющую массу $m_{\text{д}}$ и положительный заряд +e.

В результате собственный полупроводник обладает двумя механизмами проводимости: электронной проводимостью (перемещение квазисвободных электронов против поля \vec{E}_{BHem}) и <u>дырочной проводимостью</u> (туннельные скачки валентных электронов или перемещение дырок по полю \vec{E}_{BHem}). Оба механизма создают токи, направленные в одну сторону: $\vec{j} = \vec{j}_{электр} + \vec{j}_{дырочн}$.

Электронный и дырочный газы имеют сходные функции распределения. Если функция Ферми $f_{\phi}(E)$ – это вероятность заполнения электроном уровня с энергией *E*, то $1 - f_{\phi}(E)$ – это вероятность того, что состояние с энергией *E* не заполнено, или вероятность того, что на уровне *E* окажется дырка, если этот уров



заполнено, или вероятность того, что на уровне Е окажется дырка, если этот уровень расположен в валентной зоне. Можно найти выражение для концентрации невырожденного газа дырок, вычисленной с помощью распределения Ферми-

Дирака:
$$n_{\rm д} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_{\rm d} k_{\rm b} T}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{E_{\rm d} + \Delta E_{\rm 3}}{k_{\rm b} T} \right)$$

Число дырок в собственном полупроводнике должно быть равно числу квазисвободных электронов: $n_{\pi} = n_e$. Отсюда в случае одинаковых эффективных масс электрона и дырки $m_e = m_{\rm d}$ следует, что $\overline{E_{\rm d} = -\Delta E_3/2}$, т.е. уровень Ферми в собственных полупроводниках расположен посередине запрещенной зоны.

Произведение концентраций электронов и дырок $n_e \cdot n_{\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{k_{\rm B}T}{\pi \hbar^2} \right)^3 \left(m_e m_{\mu} \right)^{3/2} e^{-\frac{\Delta E_3}{k_{\rm B}T}}$ позволяет найти их темпе-

ратурную зависимость: $n_e = n_{\rm A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{k_{\rm B}T}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \left(m_e m_{\rm A} \right)^{3/4} \exp \left(-\frac{\Delta E_3}{2k_{\rm B}T} \right)$, которая в основном определяется быстро ме-

няющимся с изменением Т экспоненциальным множителем. В небольшом интервале изменения температуры изменением функции $T^{3/2}$ по сравнению с $\exp(-\Delta E_3/2kT)$ можно пренебречь и считать, что

$$n_e = n_{\rm A} \simeq n_0 \exp\left(-\Delta E_3/2kT\right) \,.$$

Плотность электрического тока пропорциональна концентрации *n* свободных носителей заряда *q* : $\vec{j} = \sigma \vec{E}_{\text{внеш}} = qn \vec{v}_{\text{дрейфа}} = qn \mu \vec{E}_{\text{внеш}}$, где $\mu - \underline{\text{подвижность}}$ носителей заряда. Поэтому температурную зависимость удельного сопротивления собственного полупроводника можно вычислить по формуле

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \approx \frac{\text{const}}{n} = \text{const} \cdot \exp\left(\frac{\Delta E_3}{2k_{\rm B}T}\right)$$

Для собственных полупроводников характерно экспоненциальное уменьшение сопротивления и возрастание тока с ростом температуры Т.

9.2. Примесные полупроводники и их проводимость

Проводимость полупроводника резко увеличивается при его легировании, т.е. внедрении в кристаллическую решетку или атомов примеси, или других дефектов структуры. Примесное легирование бывает двух типов.

> Чтобы получить полупроводник с электронной проводимостью или полупроводник *n*-типа ("negative" – отрицательный), в его решетку вводят донорную примесь, атомы которой имеют на один валентный электрон больше, чем атомы решетки. Для Si и Ge донорной примесью будет, например, фосфор Р или любой другой элемент V группы таблицы Менделеева. Лишний пятый валентный электрон в атоме примеси, который называют до-

норным электроном, не может участвовать в создании связующей орбитали, но связан с положительным ионом примеси кулоновской силой. Можно считать, что этот электрон находится на основной (первой) боровской орбите с радиусом r_1 и к нему

применимы правила квантования Бора:

1)
$$m_e \frac{\mathbf{v}_1^2}{r_1} = F_{\text{кул}} = \frac{ke^2}{\varepsilon r_1^2}$$
 (уравнение движения); 2) $m_e \mathbf{v}_1 r_1 = 1 \cdot \hbar$ (постулат квантова-

3) $E_1 = \frac{m_e v_1^2}{2} - \frac{ke^2}{\epsilon r_1}$ (энергия в основном состоянии). Здесь ϵ – диэлектрическая проницаемость полупроводния Бора);

ника. Решая совместно эти уравнения, находим, что радиус траектории электрона, связанного с ионом донорной примеси, заметно превышает постоянную решетки d: $r_1 = \frac{\epsilon \hbar^2}{k e^2 m_a} \gg d$. Круговая траектория энергетическая лиаграмма

электрона, показанная на рисунке штриховой линией, охватывает десятки атомов.

Электрона, показанная на рисупке штриховой липпен, одекладает дели и статика, одекладает дели и стат

стоянии $\Delta E_{\pi} = |E_1|$ и называется донорным уровнем. $\Delta E_{\pi} = \Delta E_{\text{связи}}$ – это энергия связи донорного электрона с ионом примеси. Получив ее, электрон отрывается от иона и становится свободным, т.е. переходит с донорного уровня в зону проводимости, как показано стрелками на рисунке. Так как в соответствии с принципом Паули на одном энергетическом уровне может находиться не более одного электрона, то число донорных уровней равно числу атомов примеси. Можно сказать, что донорные уровни образуют очень узкую подзону разрешенных значений энергий в запрещенной энергетической зоне вблизи зоны проводимости.

доног уровень Ферми ΔЕ₃ ↓ дырки (неосновные носители заряда)

полупроводника п-типа

При нагревании, приобретая тепловую энергию $3k_{\rm B}T/2 \ge \Delta E_{\rm II}$, лишние электроны отрываются от ионов примеси и становятся свободными носителями заряда. Дырки при этом не образуются. Можно ожидать, что при температуре



Т



 $T > T_0 = 2\Delta E_{\rm g}/3k_{\rm E} = 200 \div 300 \,{\rm K}$ все донорные электроны перейдут в зону проводимости. Их концентрация будет равна концентрации атомов примеси $n_{\rm H}$. При легировании полупроводника добиваются, чтобы концентрация примеси намного превышала концентрацию свободных носителей заряда (электронов и дырок) в собственном полупроводнике:

$$n_{\rm II} > 10^{23} \,{\rm m}^{-3} \gg n_{\rm cofortb} = 10^{15} \div 10^{20} \,{\rm m}^{-3}$$

<u>Основными носителями заряда</u> в полупроводнике *n*-типа будут электроны. При не слишком высоких температурах – это электроны, покинувшие атомы донорной примеси, число которых намного превышает число <u>неосновных носителей заряда</u> – дырок, которые образуются при переходе валентных электронов в зону проводимости (отрыве их от атомов). Уровень Ферми в полупроводнике *n*-типа уже не находится посередине запрещенной зоны, а располагается вблизи донорных уровней и смещается вниз с ростом *T*.

Другим типом примесного полупроводника будет <u>полупроводник *p*-типа</u> ("positive" – положительный) с преимущественно дырочной проводимостью. В его решетку вводят атомы <u>акцепторной примеси</u>, имеющие на один валентный электрон меньше, чем атомы решетки, т.е. атомы III группы таблицы Менделеева, например атомы бора *B*.



энергетическая диаграмма полупроводника р-типа



Отсутствие одного валентного электрона или вакантное состояние A в межатомных орбиталях, создающих решетку не является положительно заряженной дыркой, так как атом примеси электрически нейтрален. Но уровень энергии, соответствующий вакантному состоянию A, смещен на энергетической диаграмме вверх и находится на небольшом расстоянии ΔE_A выше верхнего уровня валентной зоны, как далее показано на диаграмме.

Этот энергетический уровень называют <u>акцепторным уровнем</u>. Число акцепторных уровней равно числу атомов акцепторной примеси. При относительно низкой (комнатной) температуре преодолеть запрещенную зону и вырваться из межатомных связей могут только немногие валентные электроны. Поэтому собственная проводимость мала. Но преодолеть небольшой энергетический промежуток $\Delta E_A \sim 0,01$ эВ, который играет роль энергии связи $\Delta E_A = \Delta E_{\text{связи}}$, и перескочить на незаполненные акцепторные уровни могут электроны из валентной зоны, как показано стрелками на рисунках. При этом в валентной зоне образуются положительно заряженные вакантные состояния – дырки, способные перемещаться по решетке полупроводника.

Как и в случае донорной примеси, при температурах $T > T_0 \approx 2\Delta E_A/3k_{\rm E} \sim 200 \div 300$ К все акцепторные уровни будут заполнены и концентрация образовавшихся дырок сравняется с концентрацией $n_{\rm II}$ примесных атомов. <u>Основными носителями заряда</u> в полупроводнике *p*-типа будут дырки, возникшие вблизи атомов акцепторной примеси, а <u>неосновными носителями заряда</u> – электроны, переходящие из валентной зоны в зону проводимости. Уровень Ферми в полупроводнике *p*-типа расположен вблизи акцепторных уровней и смещается вверх при нагревании.

Как и в собственном полупроводнике, концентрация электронов и дырок связана соотношением



$$n_{\text{OCH}} \cdot n_{\text{HEOCH}} = \frac{1}{2} \left(\frac{k_{\text{B}}T}{\pi \hbar^2} \right)^3 \left(m_e m_{\text{A}} \right)^{3/2} e^{-\frac{\Delta E_3}{k_{\text{B}}T}}.$$

Так как $n_{och} \gg n_{heoch}$, то проводимость σ примесных полупроводников определяются концентрацией примеси. При низких температурах, концентрация основных носителей заряда – электронов, покидающих донорные уровни или дырок, образующихся при заполнении акцепторных уровней – растет с ростом *T* экспоненциально. Затем, при комнатных температурах, все акцепторные уровни будут заполнены, а донорные – пусты. Концентрация основных носителей заряда будет равна концентрации атомов примеси $n_{och} = n_{\Pi}$. Удельное сопротивление будет линейно расти, как и при нагревании металлов. И только при очень высоких температурах $T > T_1$ собственная проводимость возрастает настолько, что становится больше примесной проводимости.

Если в решетку введены атомы и донорной, и акцепторной примеси, то их проводимости взаимно компенсируются: электронам энергетически выгоднее переходить с

донорных уровней не в зону проводимости, а на нижележащие вакантные акцепторные уровни. Свободные носители заряда (электроны и дырки) при этом не образуются.

9.3. p-n-переход и его вольт-амперная характеристика. Запирающий слой

Широкое применение в полупроводниковой технике находит контакт из двух примесных полупроводников *p*- и *n*-типа – <u>*p*-*n*-переход</u>, обычно изготовляемый легированием акцепторной и дырочной примесями решетки одного и того же собственного полупроводника (обычно Si или Ge).

Концентрация квазисвободных электронов n_e^n в полупроводнике *n*-типа (основные носители заряда) намного превы-

шает их концентрацию n_e^p в полупроводнике *p*-типа (неосновные носители заряда). Возникает диффузионный поток

электронов из n- в p-полупроводник и аналогичный диффузионный поток дырок из p- в n-полупроводник. В месте кон-



такта диффундирующие электроны и дырки **рекомбинируют** (электроны заполняют вакантные места-дырки и свободные носители заряда исчезают). Образуется <u>запирающий слой</u> ширины Δl , **обеднённый** свободными носителями заряда (рисунок а). Так как при диффузии электроны и дырки переносят заряд, то запирающий слой будет двойным электрическим слоем, запирающее поле \vec{E}_3 которого препятствует диффузии основных носителей заряда и помогает диффузии неосновных носителей.

В результате возникшей контактной разности потенциалов $\Delta \phi_3$ уровни энергии электронов в *p*-области будут смещены вверх на величину $e\Delta \phi_3$ (рисунок б). Это смещение таково, что уровни Ферми, или средние энергии свободных носителей заряда в находящихся в контакте *n*- и *p*-полупроводниках, после смещения выравниваются:

$$E^n_{\Phi} = E^p_{\Phi} = E^p_{\Phi} + e\Delta \varphi_3 \,.$$

С помощью записанных выше формул для концентрации дырок и электронов, можно найти величину контактной

разности потенциалов в *p-n*-переходе: $\Delta \phi_3 = \frac{E_{\Phi}^n - E_{\Phi}^p}{e} = \frac{k_{\rm b}T}{e} \ln \left(\frac{n_e^n n_{\rm d}^p}{n_c^2} \right)$, где ΔE_3 – ширина запрещенной зоны, n_e^n и $n_{\rm d}^p$

– концентрации основных носителей зарядов – электронов в *n*-области и дырок в *p*-области, n_c – концентрация электронов или дырок в собственном полупроводнике без примесей. При комнатной температуре $\Delta \phi_3 \sim \Delta E_3/e \leq 1$ В.

При выравнивании уровней Ферми система приходит в равновесие. Диффузионные потоки электронов и дырок из *n*- в *p*-область и из *p*- в *n*-область одинаковы. Такие потоки пропорциональны концентрации частиц вблизи контактного слоя. Но так как основным носителям заряда приходится преодолевать потенциальный барьер высоты $e\Delta\phi_3$, то, в соответствии с распределением Больцмана, контактный слой преодолеет только малая часть основных носителей заряда с энергией $E \ge e\Delta\phi_3$. Условие равенства диффузионных потоков, например, электронов, запишется как



$$j_{n \to p} = \text{const} \cdot n_e^n \exp\left(-\frac{e\Delta\varphi_3}{k_{\rm B}T}\right) = j_{p \to n} = \text{const} \cdot n_e^p$$

Подключим теперь к *p*-*n*-переходу источник внешнего электрического напряжения. Начинается <u>инжекция</u>, то есть поступление в полупроводник свободных носителей заряда от внешнего источника. Поток дырок, инжектированных с контакта "+" батареи, эквивалентен потоку валентных электронов, поступающих на этот контакт из полупроводника.

Внешний источник создает разность потенциалов $\Delta \phi_{\rm BHem} = U_{\rm BH}$ на клеммах *p*-*n*-перехода и дополнительное электрическое поле $\vec{\rm E}_{\rm BH}$. Уровни Ферми в *p*и *n*-областях сместятся на величину $eU_{\rm BH}$. Если внешнее поле $\vec{\rm E}_{\rm BH}$ направлено противоположно запирающему полю $\vec{\rm E}_3$ *p*-*n*-перехода, то толщина запирающего слоя уменьшается (рисунок а). Такое подключение *p*-*n*-перехода называется <u>прямым</u>. Потенциальный барьер для основных носителей заряда в месте контакта также уменьшается, а их диффузионный поток возрастает и уже не скомпенсирован обратным потоком неосновных носителей. Так как эти потоки переносят электрический заряд, то в *p*-*n*-переходе возникает <u>прямой электрический ток</u>, который для электронов запишется в виде

$$j = j_{n \to p} - j_{p \to n} =$$

$$= \operatorname{const} \cdot n_e^n \exp\left(-\frac{e\left(\Delta \varphi_3 - U_{\rm BH}\right)}{kT}\right) - \operatorname{const} \cdot n_e^p = \operatorname{const} \cdot n_e^p \left(\exp\left(\frac{eU_{\rm BH}}{kT}\right) - 1\right).$$

Аналогичный ток в том же направлении создадут и дырки.

Если поменять полюса внешнего источника (рисунок б), то создаваемое им поле \vec{E}_{BH} будет усиливать запирающее поле \vec{E}_3 . Толщина запирающего слоя

увеличится, как и величина потенциального барьера. Это – <u>обратное</u> подключение *p-n*-перехода. Знак $U_{\rm BH}$ в формуле для тока поменяется, и малым слагаемым $\exp(-eU_{\rm BH}/kT)$ можно пренебречь. Через *p-n*-переход потечет <u>обратный ток</u>, который практически будет током неосновных носителей заряда:

$$j_{\text{Heoch}} = -\operatorname{const} n_e^p$$
.



перехода:

Получили зависимость величины тока *I*, протекающего через *p*-*n*-переход, от величины приложенного внешнего напряжения $U_{\rm BH}$, или вольт-амперную характеристику *p*-*n*-

$$I = I_{\text{Heoch}} \left(\exp\left(\frac{eU_{\text{BH}}}{kT}\right) - 1 \right)$$

Этот ток создается как движением электронов, так и движением дырок. Так как концентрация неосновных носителей заряда очень мала: $n_e^p \ll n_e^n$, то обратный ток $I_{\text{неосн}}$ также очень мал. Можно считать, что *p*-*n*-переход, обладая односторонней проводимостью, может использоваться в качестве выпрямителя тока, т.е. является <u>полупроводниковым диодом</u>.

Заметим, что при возрастании обратного напряжения до величины $U_{\rm np}$ (напряжения пробоя), обратный ток резко возрастает. Это – <u>лавинный пробой</u>. Неосновные носители заряда приобретают энергию $eU_{\rm np} > \Delta E_3$, достаточную для ударной ионизации – выбивания валентных электронов из межатомных орбиталей и лавинному образованию всё новых неосновных носителей заряда.



Освещение увеличивает концентрацию электронов и дырок как в p-, так и в n-области p-n-перехода (фотоны с энергией $\hbar \omega \ge \Delta E_3$ выбивают электроны из атомов). Запирающий слой по-прежнему препятствует току основных носителей заряда, но помогает току неосновных носителей. В результате ток неосновных носителей заряда в p-n-переходе (движение возникших при освещении электронов из p- в n-область, а дырок – из n- в p-область) возрастает. Этот ток называют фототоком.

Создается фотогальванический эффект: освещение *p*-*n*-перехода, который играет роль фотоэлемента и включен в замкнутую цепь, приводит к возникновению электрического тока в нем. Если цепь разомкнута, перешедшие из *p*- в *n*-область элек-

троны и из *n*- в *p*-область дырки создают <u>фотоЭДС</u>, препятствующую дальнейшему движению неосновных носителей заряда и уменьшающую толщину запирающего слоя.

Фотогальванический эффект позволяет использовать *p*-*n*-переход в качестве элементов <u>солнечных батарей</u> – преобразователей энергии солнечного излучения в электрическую энергию. На экваторе <u>солнечная постоянная</u> или энергия солнечного излучения, падающего на 1 м² поверхности за 1 секунду равна $j_w = 1370$ Вт/м². Если бы удалось создать стабильно работающие солнечные батареи из полупроводниковых фотоэлементов с коэффициентом преобразования хотя бы $\eta \sim 0,1$, то мощность фотоэлектростанций из таких батарей с эффективной площадью 100 км², размещенных на экваторе,

была бы равна $P = \eta S j_w = 13,7 \ \Gamma B т$, что сравнимо с суммарной мощностью всех АЭС России (23,2 $\Gamma B т$).



Заметим, что подключение внешнего источника тока к *p*-*n*-переходу в прямом направлении приводит к возрастанию процесса рекомбинации инжектированных электронов и дырок в запирающем слое: поток основных носителей заряда (электронов в *n*полупроводнике) встречается с потоком основных носителей заряда (дырок в *p*полупроводнике). При рекомбинации испускаются фотоны, т.е. *p*-*n*-переход является источником достаточно монохроматичного электромагнитного излучения с частотой $\omega = \Delta E_3/\hbar$.

Можно подобрать полупроводники с такой шириной запрещенной зоны ΔE_3 , для которых излучаемый свет попадает в видимую часть спектра. Таким образом изготавливают <u>светодиоды</u> – полупроводниковые "кубики" размером 0, 3×0, 3×0, 3 мм³ с *p*-*n*-переходом. Яркость свечения этого крошечного элемента сравнима с яркостью свечи или полной Луны. Внутри светодиода можно создать два *p*-*n*-перехода с разной величиной ΔE_3 и с разной длиной волны

испускаемого света. Тем самым можно управлять цветом испускаемого излучения.

9.4. Транзисторы и их использование



Возможность управлять током, текущим по полупроводнику, имеется в <u>транзисторах</u> – основных элементах современной полупроводниковой электроники. <u>Биполярный транзистор</u>, за создание которого Бардин, Браттейн и Шокли получили Нобелевскую премию по физике в 1956 г., состоит из трех легированных областей с чередующимся типом проводимости (*p-n-p* или *n-p-n*): эмиттера, базы и коллектора.

Рассмотрим для примера *p-n-p*-транзистор, состоящий из двух соединенных навстречу друг другу *p-n*-переходов. Такое подключение называют включением по <u>схеме с общей базой</u>. Входным сигналом будет падение напряжения $U_{\rm BX}$ между эмиттером и базой, которое можно изменять с помощью реостата. Показанное на рисунке подключение внешнего напряжения будет прямым для *p-n*-перехода на границе эмиттером.

тер-база. Толщина запирающего слоя в этом переходе уменьшается, а ток I_3 , текущий через эмиттер резко увеличивается даже при небольшом увеличении $\Delta U_{\rm BX}$ входного напряжения.

Создающие ток I_3 основные носители заряда (на приведенном рисунке это дырки) попадают в базу и начинают рекомбинировать с основными носителями заряда в ней (с электронами). Из-за этого проникающий из эмиттера поток

основных носителей заряда должен уменьшаться с глубиной проникновения в базу. Расстояние $l_{\rm d}$, на котором такой поток уменьшается в e = 2,72 раз, называют <u>диффузионной длиной</u>.

Базу делают настолько тонкой, что ее толщина $l_{\rm b} \ll 10^{-7}$ м оказывается много меньше диффузионной длины: $l_{\rm b} \ll l_{\rm d}$. Поэтому основные носители заряда в эмиттере, создающие ток $I_{\rm s}$, не успевают рекомбинировать в базе и оказываются в коллекторе, где создают ток $I_{\rm K}$. Чтобы уменьшить рекомбинацию в базе ее легируют значительно слабее, чем эмиттер и коллектор. Поэтому число носителей заряда, не успевших рекомбинировать в базе и перескочивших из эмиттера в коллектор, уменьшается всего на 1÷0,1%. Носители заряда, рекомбинировавшие в базе, создают малый ток $I_{\rm b} = (0,01\div0,001)I_{\rm s}$.

Напряжение на втором *p*-*n*-переходе база-коллектор соответствует обратному подключению и практически не влияет на величину тока $I_{\rm K} = I_{\rm 9} - I_{\rm 5} \simeq I_{\rm 9}$, текущего через коллектор. Сигналом на выходе является напряжение на достаточно большом сопротивлении *R*, включенном в цепь коллектора: $U_{\rm Bbix} = I_{\rm K}R \approx I_{\rm 9}R$.

Транзистор, включенный по схеме с общей базой позволяет управлять напряжением на выходе и получать большой коэффициент усиления по напряжению $k = \frac{\Delta U_{\text{вых}}}{\Delta U_{\text{вх}}} = \frac{R\Delta I_3}{\Delta U_{\text{вх}}}$ за счет резкого увеличения тока I_3 при не-

большом увеличении входного напряжения $\Delta U_{\rm BX}$.



Можно использовать транзистор и как усилитель тока, включая его по другой <u>схеме с общим эмиттером</u>. Ток I_3 , текущий через эмиттер усилен при прямом подключении внешнего напряжения между эмиттером и базой. Носители заряда, создающие этот ток, не успевают заметно рекомбинировать в очень тонкой базе, и оказываются в коллекторе, создавая ток $I_{\rm K}$. Коэффициентом усиления по току будет отношение изменения тока в коллекторе к изменению тока в базе:

$$k = \frac{\Delta I_{\rm K}}{\Delta I_{\rm E}} = \frac{\Delta I_{\rm B} - \Delta I_{\rm E}}{\Delta I_{\rm E}} = \frac{\Delta I_{\rm B}}{\left(0,01 \div 0,001\right)\Delta I_{\rm B}} - 1 \approx 100 \div 1000 \,.$$

Как видно, этот коэффициент усиления определяется соотношением между

диффузионной длиной $l_{
m d}$ и толщиной базы $l_{
m b}$, а также степенью легирования

эмиттера, коллектора и базы.

Разновидностью полупроводниковых транзисторов являются <u>полевые транзисторы</u>, в которых управление током происходит с помощью электрического поля, перпендикулярного к направлению тока. Схема такого транзистора изображена на рисунке справа.

На поверхности полупроводника закреплены три металлических электрода: исток, затвор и сток. Между истоком и стоком приложено достаточно большое напряжение $U_{\rm HC}$, создающее ток I в полупроводнике. Практически этот ток создан носителями заряда одного знака. На рисунке справа это ток электронов – основных носителей заряда в *n*-полупроводнике.





Под затвором имеется область с *p*-проводимостью. Внешнее напряжение U_{3u} между затвором и истоком подключено в обратном направлении. На границе *p*-*n*-перехода создается запирающий слой, обедненный свободными носителями заряда, в котором ток не течет. Чем больше напряжение U_{3u} , тем толще запирающий слой, граница которого показана на рисунке штриховой линией, и тем уже проводящий канал в *n*-полупроводнике. С ростом U_{3u} сопротивление сужающегося проводящего

канала растет, а ток I между истоком и стоком уменьшается. При некотором значении U_{34} запирающий слой перекрывает всю толщину проводящего канала и ток I исчезает. Величиной тока I в полевом транзисторе управляют, меняя напряжение U_{34} между его истоком и затвором, которые аналогичны катоду и управляющей сетке вакуумной электронной лампытриода.



В последнее время в микроэлектронике всё активнее применяются <u>МДП-структуры</u>, в которых **металлический** затвор отделен от **полупроводника** тонким слоем **диэлектрика**. Электрическое поле \vec{E} , созданное напряжением U_{3u} , поданным на затвор, притягивает свободные электроны в проводящий канал (полупроводник *n*-типа), увеличивая концентрацию основных носителей заряда в нем и протекающий ток *I*. В качестве слоя диэлектрика, не позволяющего свободным электронам переходить на затвор, используют тончайшие диэлектрические пленки окислов (<u>МОП-структуры</u>: металл-оксидполупроводник).

Заметим, что все размеры *p*- и *n*-областей можно сделать очень малыми < 1 мкм. Это позволяет с помощью легирования и напыления тонких металлических переходов создать на поверхности одного монокристалла собственного полупроводника огромное количество полупроводниковых транзисторов, соединенных в сложные цепи – интегральные схемы, используемые для обработки электрических сигналов и хранения информации. Микропроцессоры современных ЭВМ – это интегральные схемы, содержащие до 10^9 транзисторов. Время срабатывания полевого транзистора $\tau \ge 10^{-11}$ с,

что позволяет обрабатывать информацию в интегральных схемах с огромной скоростью.



Пример: Полевые транзисторы на МДП-структурах являются ячейками перспективных устройств флэш-памяти. Схема таких ячеек, в огромном количестве размещенных на одном монокристалле, показана на рисунке слева и отличается от обычного транзистора еще одним слоем полупроводника между затвором и проводящим каналом. В этом слое имеются области с увеличенной проводимостью, и при подаче на затвор большого напряжения $U_{_{\rm 3H}}$ электроны за счет туннельного эффекта проникают из проводящего канала в эти области. Так происходит запись информации в ячейку флэш-памяти. Если уменьшить напряжение U_{зи}, то величина потенциального барьера между областью с увеличенной проводимостью и проводящим каналом возрастает. Электроны не могут покинуть эту область, остающуюся заряженной отрицательно (туннельный эффект через высокий потенциальный барьер невозможен). Электрическое поле, созданное сохра-

няющимся отрицательным зарядом, сужает проводящий канал и препятствует протеканию тока между истоком и стоком, уменьшая его величину. Тем самым удается считывать информацию не только по факту наличия или отсутствия тока I, но и по величине этого тока или по числу заполненных электронами областей с увеличенной проводимостью. С помощью одного транзистора удается записать несколько бит информации. Чтобы стереть её, достаточно подать на затвор большое напряжение U_{зи} обратного знака. Электроны за счет туннельного эффекта окажутся в проводящем канале и уйдут в сток.

10. СВОЙСТВА МАГНЕТИКОВ.

10.1. Магнетизм как квантовое явление. Природа пара- и диамагнетизма

В магнетиках существует магнитное поле, дополнительное к внешнему полю, и описываемое вектором намагниченности, который равен сумме магнитных моментов частиц среды в единице объема: $\vec{J} = \sum_{V=1}^{N} \vec{p}_m = \chi \vec{H}$. Здесь $\chi - V = 1$

магнитная восприимчивость изотропной среды, связанная с ее магнитной проницаемостью, $\mu = 1 + \chi$, \vec{H} – напряженность магнитного поля в среде.

Как отмечалось в разделе 18.6, магнитные среды принято делить на <u>диамагнетики</u> (для которых $\chi < 0$ и $\mu \lesssim 1$), <u>парамагнетики</u> ($\chi > 0$ и $\mu \gtrsim 1$) и <u>ферромагнетики</u> ($\chi > 0$ и $\mu \gg 1$).



Все попытки объяснить диамагнетизм или парамагнетизм с помощью представлений классической физики неверны. Согласно фундаментальной теореме Бора-ван-Лёвен (она была темой диссертации Нильса Бора, защищенной в 1911 г.) сумма магнитных моментов, созданных движением всех электронов среды по классическим траекториям во внешнем магнитном поле, обязательно равна нулю, и никакой суммарной намагниченности $\vec{J} = \sum \vec{p}_m$ они создать не могут. Магнитное поле, созданное токами намагничивания внутри среды, компенсируется магнитным полем, созданным токами намагничивания, протекающими по поверхности среды, как показано на рисунке.

Магнетизм сред – это квантовый эффект и объяснить его можно только в рамках квантовой теории. Явление диамагнетизма – небольшого ослабления внешнего магнитного поля в среде – существует во всех ве-

ществах. При включении постоянного магнитного поля с индукцией \vec{B} , энергия системы из Z электронов атома согласно решению квантового уравнения Шредингера должна измениться на 2

величину
$$\Delta E_{\rm arr} = \frac{e}{12m_e} \vec{B}^2 Z \langle r^2 \rangle$$
, где $\langle r^2 \rangle$ - среднее значение квадрата радиуса боровской орби-

ты электрона в атоме. Эту энергию можно рассматривать как энергию взаимодействия магнит-

ного момента атома с полем \vec{B} : $\Delta E_{\rm ar} = -\vec{p}_{m\,{\rm arr}} \cdot \vec{B}$. Сравнивая формулы, видим, что магнитные моменты атомов должны быть направлены против поля:





 $\vec{p}_{max} \uparrow \downarrow \vec{B}$. Поэтому намагниченность $\vec{J} = \sum \vec{p}_{max}$ будет направлена против \vec{B} , ослабляя внешнее магнитное поле $(\mu < 1)$. Этот эффект усиливается, если в среде имеются свободные носители заряда (электроны или дыр-

ки). В магнитном поле их траектории искривляются. Они движутся по круговым траекториям радиуса r_n и, как показал Ландау, создают эффективный ток I и дополнительное поле \vec{B}_{non} , усиливающее диамагнетизм. Парамагнетизм веществ также обусловлен вкладом как атомов (ионов), так и квазисвободных электронов. Объясняется он тем, что эти частицы могут иметь ненулевые магнитные моменты \vec{p}_m , энергия которых $E = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$ во внешнем магнитном поле \vec{B} минимальна, когда моменты \vec{p}_m ориентированы по полю \vec{B} . Но выстраивание моментов \vec{p}_m по полю привело бы к их упорядочению и уменьшению энтропии, что противоречит II началу термодинамики. Поэтому тепловое движение разупорядочивает ориентацию магнитных моментов частиц парамагнитной среды, и они оказываются ориентированными по полю \vec{B} только частично. Суммарный эффект ориентации очень мал.

Парамагнетиками, могут быть те среды, атомы которых имеют ненулевые магнитные моменты $p_{m \, at}$,

эффект частичной ориентации которых по внешнему полю превышает диамагнитный эффект.

Но ориентация магнитных моментов по полю должна происходить в соответствии не с классическими, а с квантовыми законами. Суммарный магнитный момент полностью заполненной атомами оболочки или подоболочки атома равен нулю. Поэтому магнитный момент атома создают электроны из внешней, заполненной не до конца атомной подоболочки. Она заполняется электронами в соответствии с принципом Паули и <u>правилами Ху́нда:</u>

1) электроны подоболочки должны различаться значением хотя бы одного из квантовых чисел: магнитного числа $m = 0, \pm 1, ..., \pm l$ или спинового числа $\sigma = \pm 1/2$;

2) в первую очередь заполняются состояния, дающие максимальную величину суммарного спинового квантового числа *S* подоболочки;

3) с учетом правил 1 и 2 подоболочка должна иметь максимальную величину суммарного орбитального квантового числа *L*.

Выполнение этих правил обеспечивает наименьшую возможную энергию многоэлектронного атома. Для примера рассмотрим заполнение электронами подоболочек атома железа Fe, имеющего Z = 26 электронов: $1s^2 2s^2 p^6 3s^2 p^6 d^6 4s^2$, у которого незаполненной будет 3*d*-подоболочка с главным квантовым числом n = 3 и орбитальным квантовым числом l = 2 (разделы 27.7 и 27.8). Эту подоболочку могут заполнять 2(2l+1)=10 электронов, которые, в соответствии с принципом Паули, различаются значениями магнитного и спинового квантовых чисел:

В классической физике векторы орбитального магнитного момента и спинового магнитного момента всех электронов частично заполненной подоболочки складывались бы, давая суммарный магнитный момент атома $\vec{p}_{m \text{ at}}$. Но в квантовой теории они связаны более сложным способом, и величина $p_{m \text{ at}}$ может иметь только отдельные разрешенные значения $p_{m \text{ at}} = g\mu_{\rm E}\sqrt{I(I+1)}$,

определяемые новым квантовым числом *I*. Это число равно I = |L - S|, если подоболочка заполнена электронами меньше, чем наполовину, и I = L + S, если подоболочка заполнена наполовину или больше. $g = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{L(L+1) - S(S+1)}{I(I+1)} - \frac{1}{2} \frac{L(L+1) - S(S+1)}{I(I+1)}$

<u>фактор Ланде</u>, а $\mu_{\rm E} = e\hbar/2m_e = 9,274 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл – <u>магнетон Бора</u>. Так определяют величину магнитного момента $p_{m\,\rm ar}$ отдельного многоэлектронного атома.

В твердых парамагнетиках ионы решетки расположены близко друг к другу, и на каждый ион дополнительно действуют сравнительно большие электрические поля соседних ионов решетки. Эти поля усредняют направления орбитальных магнитных моментов всех ионов решетки, и их средняя проекция на направление \vec{B} оказывается равной нулю: $\langle \vec{p}_{m \text{ орб}} \cdot \vec{B} \rangle = 0$. Этот эффект называется "замораживанием" орбитальных моментов. В результате вклад в намагниченность твердой парамагнитной среды дают только собственные (спиновые) магнитные моменты атомов (ионов), для которых $p_{ms \text{ ат}} = 2\mu_{\rm E}\sqrt{S(S+1)}$. По-прежнему эти магнитные моменты ориентированы вдоль направления внешнего поля \vec{B} очень слабо и магнитная восприимчивость парамагнетика мала и уменьшается с ростом температуры T по закону Кюри-Вейсса $\chi_{\rm II} = \frac{C}{T - T_{\rm II}}$, где C – постоянная Кюри, а $T_{\rm II}$ – парамагнитная температура Кюри, являющиеся характеристиками парамагнитной среды.

В результате диамагнетизм, присущий всем средам, оказывается замаскированным более сильным парамагнитным эффектом, и большинство металлов и газов оказываются парамагнетиками.

10.2. Причины появления магнитного упорядочения. Ферро- и антиферромагнетизм

Ряд твердых сред (металлов, полупроводников и диэлектриков), в решетках которых имеются всё те же ионы переходных элементов с незаполненными до конца 3*d* - или 4*f* -подоболочками, имеют очень большие значения магнитной восприимчивости или магнитной проницаемости χ , $\mu \gg 1$. Их называют <u>ферро-</u> или <u>ферримагнетиками</u>. Ферромагнетиками, например, являются чистые металлы Fe, Ni и Co (для Fe $\mu_{max} = 5000$).

Явление ферромагнетизма или магнитного упорядочения объясняется квантовым эффектом появления обменного взаимодействия, не имеющего классического аналога, и выстраивающего спины или собственные магнитные моменты всех атомов решетки в определенном направлении (порядке). Если расстояние *d* между соседними атомами невелико, то их не полностью заполненные электронные подоболочки перекрываются, и возникает <u>обменное взаимодействие</u>. Как показал Гейзенберг, решая уравнение Шредингера с учетом полей соседних ионов, оно пропорционально скалярному произведению собственных (спиновых) магнитных моментов соседних атомов "1" и "2". Это взаимодействие тем заметнее, чем сильнее перекрываются электронные подоболочки. В результате к кулоновской энергии взаимодействия ядер и элек-

тронных оболочек соседних атомов добавляется обменная энергия $E_{\text{обм}} = -\left(\frac{e}{m_e}\right)^2 A(d) \vec{p}_{ms1} \cdot \vec{p}_{ms2}$, где величина коэф-

фициента A(d) сильно возрастает с уменьшением d.

Знак A(d) не обязательно положителен и зависит от конфигурации перекрывающихся электронных облаков (связующих орбиталей). Если A(d) > 0, то энергетически выгодным ($E_{oбM} = min$) становится ферромагнитный тип упорядочения: спиновые магнитные ^{*A*} моменты соседних атомов выстроены параллельно (рисунок а). Если A(d) < 0, то осуществляется антиферромагнитный тип упорядочения: магнитные моменты соседних атомов антипараллельны (рисунок б).

Общее свойство ферромагнетиков состоит в том, что при нагревании выше температуры $T_{\rm K}$, называемой <u>температурой Кюри</u> или <u>точкой Кюри</u>, они теряют ферромаг-

нитные свойства и превращаются в парамагнетики. Величина температуры Кюри зависит от расположения ионов кристаллической решетки и достаточно велика: так $T_{\mathrm KFe} = 1044~\mathrm{K}$, $T_{\mathrm KNi} = 627~\mathrm{K}$.

Примеры упорядоченных магнитных структур показаны на рисунке. <u>Ферримагнетиками</u> называются антиферромагнетики, решетка которых состоит из атомов разного сорта, магнитные моменты которых сильно отличаются по величине. Поэтому сумма магнитных моментов или вектор намагниченности ферримагнетика $\vec{J} = \sum \vec{p}_{msat}$ имеет такую

же большую величину, как и у ферромагнетика. Это приводит к тому, что по своим магнитным свойствам ферримагнетики аналогичны ферромагнетикам.

Ферримагнетики делятся на домены, а при изменении действующего на него внешнего магнитного поля проявляют эффект гистерезиса (см.раздел 18.7 и 18.8). Их преимущество в том, что многие ферримагнетики – ферриты – не проводят ток. Это позволяет использовать ферриты во всех устройствах, где имеется переменное электромагнитное поле СВЧ-диапазона и надо избежать ог-

Тип магнитной структуры	Схема расположения магнитных моментов	Пример решетки магнетика
ферромагнитная пример: Fe	∔∔∔∔∔∔ Ţ	$\begin{array}{c} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & $
антиферромагнитная пример: MnO	∔ 	$ \begin{array}{c} & & & & & & & & & & & & & & & & & & &$
ферримагнитная пример: MeO Fe ₂ O ₃ Me– двухвалентный металл Ni,Fe,Co,Mn,	Ţ↓ ţ↓ţ↓ţ↓ţ↓ ţ↓ţ↓ţ↓	

ромных потерь энергии (в проводящих ферромагнетиках электромагнитное поле создает индукционные токи, быстро затухающие с выделением тепла).

Как и в случае ферромагнитиков, при достижении критической температуры T_N , которая называется <u>температурой</u> <u>Нееля</u> или <u>точкой Нееля</u>, магнитное упорядочение в антиферромагнетиках и ферримагнетиках исчезает, и при $T > T_N$ они превращаются в парамагнетики.



10.3. Магнитный резонанс и его использование



<u>Магнитный резонанс</u> – это сильное резонансное поглощение электромагнитного излучения с отдельными частотами ω средой, в которой создано магнитное поле \vec{B} . Причина этого поглощения – расщепление разрешенных энергетических уровней свободных электронов, электронных оболочек атомов или атомных ядер на величину ΔE во внешнем магнитном поле \vec{B} . Если энергия падающего на среду фотона электромагнитного излучения равна $\hbar\omega = \Delta E$, то происходит поглощение фотона и переход с нижнего основного уровня энергии E'_0 на верхний

возбужденный уровень.

Магнитные моменты частиц (электронов, атомов или ядер) могут принимать только отдельные дискретные значения проекции на ось *z*, направленную вдоль поля \vec{B} . Дополнительная энергия их взаимодействия с полем $\Delta E = -\vec{p}_m \vec{B} = -p_{mz} B$ создает расщепление. Число уровней, на которые расщепится уровень E_0 при включении поля \vec{B} равно числу разрешенных проекций p_{mz} .

Например, из-за взаимодействия с полем \vec{B} орбитального магнитного момента отдельного электрона из подоболочки с орбитальным квантовым числом l, имеющего проекции $p_{mz} = m\mu_{\rm B}$, где магнитное квантовое число принимает значения $m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l$, его уровень энергии расщепится на 2l + 1 подуровень. В результате изменится картина спектра, например, одноэлектронного боровского атома, как показано на правом рисунке для двух линий спектра $n' = 2 \rightarrow n = 1$ и $n' = 3 \rightarrow n = 2$. Оказывается, что разрешены только такие переходы электронов с уровня на уровень, при которых квантовы<u>е числа меняются следующим образом:</u>

 Δn – любое; $\Delta m = 0, \pm 1; \Delta l = \pm 1; \Delta s = 0$

Это – <u>правила отбора</u>. Остальные переходы, не удовлетворяющие этому правилу, запрещены. В результате разрешенные спектральные линии $3s \rightarrow 2p$, $3p \rightarrow 2s$, $3d \rightarrow 2p$ совпадают, и каждая линия спектра расщеплена в три близко расположенные линии.



Ţ

Подобное расщепление спектральных линий и разрешенных уровней энергий во внешнем магнитном поле называется эффектом Зеемана.

Существуют разные виды магнитного резонанса. Для определения свойств парамагнетиков используется электронный парамагнитный резонанс (ЭПР), обнаруженный Завойским в 1944 г.

В установках ЭПР между зеркал резонатора создают стоячую электромагнитную волну с фиксированной частотой ю. В точке максимального магнитного поля этой волны помещают исследуемый образец среды размером несколько миллиметров. С помощью электромагнита создают постоянное магнитное поле \vec{B} , действующее на образец. Такое поле расщепляет уровни энергии атомов образца на величину $\Delta E = \Delta p_{ms z} B$, где \vec{p}_{ms} - магнитный момент частично заполненной электронами подоболочки атома (как правило – это спиновый



 \vec{B} постепенно увеличивают. Когда разность расщепленных уровней увеличивается до величины $\Delta E = \hbar \omega$ фотоци цеременного электрома

магнитный момент). Величину поля

 $\Delta E = \hbar \omega$, фотоны переменного электромагнитного поля с частотой ω начинают поглощаться, переводя все атомы образца в состояние, когда проекции p_{msz} имеют один знак.

Величина намагниченности J в точке резонанса $B = B_{\rm p}$ резко возрастает, а интенсивность I поля между зеркалами резонатора уменьшается.

В реальных образцах внутрикристаллическое поле, а затем и более тонкое спин-орбитальное взаимодействие, дополнительно расщепляют вырожденный уровень энергии изолированного иона (атома) и картина спектра ЭПР имеет множество резонансных пиков разной величины. По их положению и интенсивности можно получить информацию о пространственном расположении ионов в кристаллической решетке, т.е. о структуре вещества.



้N

В ферромагнетиках или антиферромагнетиках магнитные моменты отдельных атомов (ионов) ориентированы параллельно и не могут изменить свое направление при поглощении фотона. Тем не менее существует <u>ферромагнитный или</u> <u>ферримагнитный резонанс</u> – эффект резонансного поглощения энергии переменного электромагнитного поля в ферромагнитном образце, помещенном в ту же самую установку для наблюдения ЭПР.

Дело в том, что спиновые магнитные моменты атомов должны совершать прецессию – совместно вращаться вокруг направления внешнего поля \vec{B} . В точке резонанса, когда частота переменного электромагнитного поля совпадает с частотой прецессии ω_0 , энергия поля поглощается ферромагнетиком, превращаясь в энергию прецессии моментов \vec{p}_{ms} , усиливая её. Как и ЭПР, ферро- или ферримагнитный резонанси используют для определения параметров и свойств кристаллических решеток



магнетиков. Так как частота ферромагнитного резонанса ω₀ попадает в СВЧ-диапазон, ферриты обладают свойством сильно поглощать СВЧ-излучение определенных частот. Из них изготовляют, например, ферритовые СВЧ-фильтры.

10.4. Магнитострикционные явления

Изменение намагниченности среды заметно влияет и на ее механические свойства. Э.Вилла́ри еще в 1865 г. обнаружил, что сжатие или растяжение ферромагнетика меняет величину его спонтанной намагниченности \vec{J}_0 (эффект <u>Вилла́ри</u>). При такой деформации даже незначительное изменение расстояния между ионами может перестроить форму связующих орбиталей и существенно эффект обменного взаимодействия.

Обратное явление <u>магнитострикции</u>, открытое Джоулем в 1842 г., заключается в изменении размеров и формы ферро- или ферримагнитной среды при ее намагничивании.



Величина магнитострикции характеризуется относительным удлинением – отношением изменения размера среды Δl к его первоначальному размеру l. Это изменение в продольном Δl_{\parallel} и поперечном Δl_{\perp} направлениях к приложенному внешнему магнитному полю с напряженностью \vec{H} показано на рисунке а. На рисунке б приведен график зависимости относительного удлинения от величины H для сплава Fe - Ni. Как видно, магнитострикция может быть как положительной ($\Delta l > 0$, магнетик растягивается при намагничивании), так и отрицательной ($\Delta l < 0$, магнетик при намагничивании сжимается).

У некоторых редкоземельных металлов, урана и их соединений наблюдается <u>ги-</u> <u>гантская магнитострикция</u>. Для Тb, например, $\Delta l/l = 0,022$! Это объясняется тем, что ионы редкоземельных элементов имеют значительно бо́льшие магнитные моменты, чем, например, ионы Fe или Ni.

Большая величина магнитострикции позволяет создать разнообразные <u>магнитострикционные преобразователи</u>, пример которого изображен справа. Пусть по обмотке катушки, навитой

на ферритовый сердечник, течет переменный ток $I_0 \cos \omega t$. Создаваемое в феррите переменное $I_0 \cos \omega t$ магнитное поле $H_0 \cos \omega t$ приводит к появлению механических колебаний длины стержня с той же частотой ω . Эти колебания создают звуковые волны с частотой ω в окружающей среде. Подобные преобразователи используются в акустоэлектронике для получения ультразвуковых волн в сонарах или эхолотах.



Если же звуковые волны с частотой ω приходят извне, то ферритовый стержень начнет сжиматься и растягиваться с частотой волны. Эффект Вилла́ри приведет к колебаниям ве-

личины спонтанной намагниченности в феррите и в обмотке катушки возникнет переменный индукционный ток с той же частотой (). Использование магнитострикционных преобразователей для превращения электрических колебаний в звуковые волны и наоборот (микрофон) выгоднее использования тонких пьезоэлектрических мембран ввиду большой прочности и долговечности феррита.



Другой пример магнитострикционного преобразователя – датчик для очень точного измерения механических напряжений и деформаций. Ферритовый стержень крепится к детали в точках A и B. Ток I_1 в обмотке 1 приводит к намагничиванию феррита и появлению в нем поля \vec{H} и намагниченности \vec{J} . При деформации детали расстояние l между точками A и B изменяется на величину Δl . В силу эффекта магнитострикции меняется намагниченность \vec{J} и в контрольной обмотке 2 создается индукционный ток, ве-

личина которого пропорциональна деформации Δl .

10.5. Гальваномагнитные явления

Эти явления возникают, когда на проводник с электрическим током действует внешнее магнитное поле. К ним, прежде всего, относится известный в классической физике <u>эффект Холла</u> (1879 г.) – появление поперечной холловской разности потенциалов $\Delta \phi$ при помещении металлического проводника ширины l с плотностью тока j в перпендику-

лярное к току магнитное поле с индукцией \vec{B} .

На свободные электроны с концентрацией *n*, движущиеся со средней дрейфовой скоростью \vec{v} и создающие ток $\vec{j} = -en\vec{v}$, действует со стороны магнитного поля сила Лоренца $\vec{F}_{\text{магн}} = -e[\vec{v}, \vec{B}]$, "прижимающая" электроны к боковой стороне проводника. При этом на этой стороне появляется отрицательный заряд. На противоположной боковой стороне возникает эффективный положительный заряд, и создается поперечное электрическое поле с напряженностью \vec{E}_{\perp} , действие которого уравновешивает магнит-



ную силу:
$$\vec{F}_{_{3\Pi}} = -e\vec{E}_{\perp} = -\vec{F}_{_{MAГH}}$$
, откуда $\Delta \phi = E_{\perp}l = vBl = jBl/en$.
Постоянную $R = 1/(-e)n$, связывающую ток, магнитное поле и холловское электрическое поле $E_{\perp v} = Rj_x B_z$, на-

зывают постоянной Холла. Как видно, холловская постоянная зависит только от концентрации электронов n и от их заряда (знак постоянной R совпадает со знаком заряда носителей тока). В действительности постоянная Холла R может зависеть и от величины магнитного поля B, и от температуры, и может менять знак (в алюминии R > 0).

С этим связан и эффект <u>магнетосопротивления</u> – изменение удельного сопротивления металла в присутствии внешнего магнитного поля с индукцией \vec{B} . Свободные электроны в таком поле под действием внешней силы Лоренца $\vec{F}_{\text{внеш}} = -e[\vec{v}, \vec{B}]$ должны двигаться по спирали вокруг линий \vec{B} . Но квазисвободные электроны проводимости в металле движутся по более сложным траекториям, поскольку на них действуют поля соседних частиц.



При одной ориентации внешнего поля \vec{B}_1 такие электроны вращаются

вокруг направления \vec{B}_1 и вокруг ионов решетки по замкнутым траекториям I. Они практически "кружатся на месте" если поле \vec{B}_1 настолько велико, что радиус траектории $r = m_e v_{\perp}/eB_1$ много меньше средней длины $\langle l \rangle$ свободного пробега электрона. Смещаться против электрического поля \vec{E} такой электрон будет только в результате рассеяния на тепловых колебаниях решетки, оказываясь на столь же малой орбите. Это приводит к уменьшению электрического тока или увеличению эффективного удельного сопротивления ρ среды. Но если такое же по величине магнитное поле ориентировать вдоль направления \vec{B}_2 , то траектория электрона становится незамкнутой, и он пролетает в металле значительно бо́льшее расстояние противоположно направлению напряженности \vec{E} . Ток увеличивается, а величина ρ уменьшается.

11. ОСНОВЫ ТЕОРИИ АТОМНОГО ЯДРА

11.1. Состав атомного ядра. Нуклоны. Массовое и зарядовое число. Изотопы

Ядро любого атома состоит из протонов и нейтронов, которые называют <u>нуклонами</u> – составными частицами ядра (лат. – *nucleus*). Масса протона $m_p \approx 1836 m_e = 1,6726 \cdot 10^{-27}$ кг, а его положительный заряд $+e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл по величине равен заряду электрона. Масса нейтрона чуть больше; $m_n = 1,6748 \cdot 10^{-27}$ кг, а заряд нейтрона равен нулю. Как и электроны, протоны и нейтроны имеют спиновое число s = 1/2.

Число Z протонов в ядре называют его зарядовым числом. Число A нуклонов в ядре называют его массовым числом. Число нейтронов в ядре N = A - Z.

Число Z протонов в ядрах одного химического элемента одинаково и определяет число электронов в атоме, структуру электронных оболочек и место этого элемента в таблице Менделеева. Число нейтронов в ядрах такого элемента может быть разным и не оказывает существенного влияния на структуру электронных оболочек и химические свойства атома.

Ядра (атомы) с одинаковым зарядовым числом Z и разным массовым числом A (разным числом нейтронов) называют изотопами. Их принято обозначать ${}^{A}_{Z}X$, где X – символ химического элемента. Известно, например, три изотопа водорода:

Число изотопов у элементов с большими зарядовыми числами Z велико. У платины, например, наблюдается 34 изотопа ${}^{A}_{78}Pt$, где $168 \le A \le 201$; у цезия – 35 изотопов ${}^{A}_{55}Cs$, где $114 \le A \le 148$.

<u>Радиус ядра</u> можно вычислить по приближенной формуле $r_{\rm g} \approx 1, 1 \cdot \sqrt[3]{A} \cdot 10^{-15}$ м.

11.2. Деление ядер. Энергия связи атомного ядра. Устойчивость и неустойчивость ядер

Некоторые ядра-изотопы устойчивы, а некоторые очень быстро распадаются на ядра-осколки или испускают какие-либо частицы, превращаясь в другие ядра. Проще всего объяснить деление ядер, если рассматривать ядро как сферическую каплю, в которой нуклоны ведут себя как несжимаемая сверхтекучая "нуклонная жидкость" с постоянной плотностью. Это – модель Бора и Вайцзеккера.



Рассмотрим исходное ядро, внутри которого могут случайно образоваться совокупности нуклонов I и II – зародыши новых ядер. На рисунке а) они обозначены штриховой линией. Если капля-ядро деформируется, расстояние *r* между цен-

трами таких зародышей возрастает (рисунок б). Но сильное взаимодействие между нуклонами препятствует их раздвиганию, и потенциальная энергия взаимодействия $U_{\rm B3}$ между зародышами также растет и достигает максимума, когда ядро принимает форму вытянутого сфе-

роида (см. рисунок б и рисунок справа). При дальнейшей деформации капля-ядро принимает "гантелеобразную" форму (рисунок в), а энергия взаимодействия между зародышами I и II начинает уменьшаться и падает до нуля, когда капля разрывается на две капли-осколка (рисунок г), между которыми силы притяжения нуклонов уже не действуют.

Подобная деформация ядра с распадом на осколки происходит, когда ядро поглощает какую-либо частицу, например – γ – квант, передающую энергию и импульс нуклонам ядра. Но тот же механизм приводит и к <u>спонтанному самопроизвольному делению</u> <u>ядер</u>. Зародыши новых ядер I и II не проходят все стадии деформации

ядра, а случайным образом, начав деформацию, преодолевают потенциальный барьер за счет туннельного эффекта.

Естественная радиоактивность или спонтанный распад ядер объясняется на-

личием туннельного эффекта.

Аналогично описываются процессы столкновения ядер, когда в момент слияния двух капель образуется одна капля в неустойчивом промежуточном состоянии, в котором нуклоны первоначальных ядер перемешиваются, а структура первоначальных ядер исчезает. В результате промежуточное состояние (<u>ядерный резонанс</u>) распадается на новые разлетающиеся ядра.

Капельная модель ядра позволяет ответить на вопрос: сколько нейтронов и протонов может войти в состав ядеросколков и почему, например, одни ядра очень устойчивы, а другие – мгновенно распадаются.

Для этого определяют <u>энергию связи ядра</u> E_{cB} , как минимальную энергию, которую надо сообщить покоящемуся ядру, чтобы разделить его на отдельные нуклоны. Разделив энергию связи ядра на число нуклонов, получаем <u>удель-</u>

<u>ную энергию связи</u>, приходящуюся на один нуклон $\varepsilon_{cB} = E_{cB}/A$. Усредненный график зависимости ε_{cB} от числа A нуклонов в ядре показан на рисунке. Отдельные точки выше или ниже этого графика соответствуют отдельным устойчивым изотопам, или нестабильным, быстро распадающимся изотопам.

Наиболее устойчивы ядра с массовым числом $A = 40 \div 70$ (хотя и среди них имеются неустойчивые изотопы с избыточным или недостаточным числом нейтронов). Эти ядра имеют наибольшую удельную энергию связи ε_{cB} . С ростом числа нуклонов A наблюдается тенденция к уменьшению ε_{cB} . Это означает, что тяжелые ядра менее устойчивы и для

них энергетически выгоден самопроизвольный распад в более легкие ядра с бо́льшей энергией связи.

Такие спонтанные распады ядер – <u>естественная радиоактивность</u> – наблюдаются у всех элементов с $Z \ge 84$, не имеющих стабильных изотопов. Предсказано существование стабильных ядер с очень большим зарядовым числом Z = 190, но пока их существование остается гипотетическим. В настоящее время обнаружены ядра с наибольшим зарядовым числом Z = 118.

11.3. α-, β- и γ-излучение. α- и β-распад ядер

Ядерные превращения, как правило, сопровождаются испусканием небольших частиц – ядер водорода (протонов), ядер гелия, электронов и т.п., масса которых мала, а вероятность вылета из ядра за счет туннельного эффекта достаточно велика.

Какие именно частицы вылетят из нестабильного ядра и какой тип распада оно испытает – зависит от соотношения числа N нейтронов и числа Z протонов в ядре. На рисунке сплошная <u>линия стабильности ядер</u> 01 соответствует максимальному значению энергии связи ядра (такие ядра устойчивы). К области выше этой линии относятся <u>нейтронно-избыточные</u> ядра, энергия связи которых уменьшена из-за того, что в ядре присутствуют лишние нейтроны. Чтобы энергия связи ядра возросла, часть таких нейтронов должна превратиться в протоны в

реакции <u>β-распада</u> нейтрона

 $n^0 \to p^+ + e^- + \overline{\nu}_e$

при которой образуется протон p^+ и электрон e^- . Вылетающие из ядра электроны были на-

званы β-частицами. Их кинетическая энергия E_{кe} меньше той, что соответствует закону сохранения энергии. Поэтому



нейтронноизбыточные

ядра

Ω

нейтронно-

дефицитные

ядра

Ζ

промежуточное

состояние

n^{*}n^{*}p^{*}n

n⇒p‴



наряду с протоном и электроном испускается безмассовая частица \overline{v}_e , которую позже назвали <u>электронным антинейтри</u>но, и которая уносит недостающую энергию.

 β^- распад нейтронно-избыточных ядер X в ядра Y происходит по схеме $A_Z^A X \rightarrow A_{Z+1}^A Y + e^- + \overline{\nu}_e$

Пример: ${}^{210}_{83}Bi \rightarrow {}^{210}_{84}Po + e^- + \overline{v}_e$.

Ядра, лежащие ниже линии 0I, также имеют уменьшенную энергию связи из-за того, что число нейтронов в них мало. Такие ядра называют <u>нейтронно-дефицитными</u>. Увеличение числа нейтронов может происходить двумя способами:

реакция <u>β⁺-распада</u>, обратная процессу β⁻-распада. При этом избыточный протон ядра распадается в нейтрон

 n^0 , <u>позитрон</u> e^+ и <u>электронное нейтрино</u> v_e : $p^+ \rightarrow n^0 + e^+ + v_e$.

Наряду с электронами e^- , позитроны e^+ также называют <u> β -частицами</u>.

 β^+ -распад нейтронно-дефицитных ядер X в ядра Y идет по схеме $\begin{bmatrix} A \\ Z \\ X \rightarrow A \\ Z^{-1} \\ Y + e^+ + v_e \end{bmatrix}$

Пример: $^{202}_{83}Bi \rightarrow ^{202}_{82}Pb + e^+ + v_e$;

2) реакция электронного захвата. Избыточный протон ядра захватывает электрон из электронной оболочки, окружающей ядро в атоме. Как правило, это электрон из ближайшей К-оболочки атома. Поэтому реакцию электронного захвата часто называют <u>К-захватом</u>. Она сопровождается испусканием электронного нейтрино: $p^+ + e^- \rightarrow n^0 + v_e$.)

Ядерная реакция при электронном захвате идет по схеме $\begin{array}{c} A \\ Z \\ X + e^{-} \rightarrow A \\ Z - 1 \\ Y + v_{e} \end{array}$

Пример:
$$^{204}_{83}Bi + e^- \rightarrow ^{204}_{82}Pb + v_e$$
.

Реакции β^{\pm} -распада и электронного захвата уменьшают число или избыточных нейтронов, или избыточных протонов в ядре, увеличивают энергию связи ядра, делают его более устойчивым, возвращают отношение N/Z к оптимальной величине.

Имеется еще одна возможность спонтанного распада с выделением энергии – <u> α -распад</u> <u>ядра</u>. При α -распаде ядро испускает <u> α -частицу</u> – ядро $\frac{4}{2}He$, имеющее очень большую

удельную энергию связи $\varepsilon_{\rm cB\,He} = 7,03$ Мэв/нуклон и массу $m_{\alpha} = 6,644 \cdot 10^{-27}$ кг.

 α -распад ядра X в ядро Y происходит по схеме $\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} X \rightarrow \frac{A-4}{Z-2}Y + \frac{4}{2}He$.

Пример:
$$^{212}_{83}Bi \rightarrow ^{208}_{81}Tl + \alpha$$
.

Механизм α -распада ядра таков: вблизи поверхности ядра нуклоны самопроизвольно появляются зародыши α -частицы из двух протонов и двух нейтронов, которые непрерывно образуются и распадаются. В соответствии с соотношением неопределенности они на очень короткое время Δt могут изменить свою энергию на величину $\Delta E \sim \hbar/\Delta t$ и оказаться на энергетическом уровне, лежащем выше уровня E = 0. С некоторой вероятностью зародыш α -частицы может преодолеть потенциальный барьер, образованный сильным ядерным притяжением нуклонов и кулоновским отталкиваем, и вырваться из ядра за счет туннельного эффекта.



·60

́р+≩ ядро

▲Е п_состояние ↓ΔЕ основное γ-квант состояние Нуклон в ядре, как и электрон в атоме, может оказаться на разрешенном энергетическом уровне, лежащем выше основного энергетического уровня. Такое ядро называют <u>возбужденным</u>. Как правило, время жизни возбужденного ядра $\tau \sim 10^{-12}$ с много меньше времени жизни возбужденного атома $\tau \sim 10^{-8}$ с. Нуклон возврашается на оказавшийся не-

заполненным нижележащий уровень энергии (в основное состояние), испуская фотон. Так как расстояния между разрешенными уровнями энергии в ядре имеют много большую величину $\Delta E \sim 10 \div 0,01$ МэВ, чем расстояния между уровнями энергии электрона в атоме, то фотоны, испускаемые возбужденными ядрами, имеют очень большую частоту $\omega = \Delta E/\hbar \ge 10^{19} c^{-1}$ и малую длину волны $\lambda = 2\pi c/\omega \le 10^{-10}$ м. Электромагнитное излучение с такими частотами обладает сильно выраженными корпускулярными свойствами. Оно ведет себя как поток частиц – <u>у-квантов</u> – с энергией и импульсом $E_{\gamma} = \hbar\omega$, $p_{\gamma} = \hbar\omega/c$. Это излучение, которое в отличие от потоков α - и β -частиц не отклоняется магнитным полем, сейчас называют <u>у-излучением</u>.

Такие переходы из возбужденного состояния в основное $\begin{bmatrix} A & X & \to A \\ Z & X & \to Z \\ X & Y \end{bmatrix}$ часто называют <u>у-распадом ядра</u>. Ядра *X* и *X* называют <u>изомерами</u>. Число протонов и нейтронов в изомерах *X* и *X* одинаково, но конфигурации их нуклонных подоболочек различны. Поэтому изомеры имеют разную энергию связи, разный период α - или β -распада, могут испытывать разный тип распада, т.е. ведут себя, как разные ядра.

11.4. Естественная радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Период полураспада

Спонтанные распады ядер (деление ядер, их α–, β– и γ– распад) происходит самопроизвольно и называется – естественной радиоактивностью. Она наблюдается практически у всех изотопов но с разной скоростью.

Момент распада каждого отдельного ядра определить невозможно. Законы квантовой физики позволяют найти только **вероятность** этого распада. Если число N ядер велико, то число ядер, распавшихся за время dt, будет пропорционально числу имевшихся ядер и интервалу времени dt: $-dN = \lambda N dt$. Знак "-" означает, что число ядер, не успевших распасться, убывает со временем, т.е. dN < 0. Постоянная λ различна для разных изотопов и типов распада. Ес называют <u>постоянной распада</u>.

Интегрируя обе части этого выражения, получаем экспоненциальный закон убывания числа не распавшихся

ядер со временем: $\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_{0}^{t} dt$ или $N = N_0 e^{-\lambda t} - \underline{3}$ акон радиоактивного распада.

Здесь N₀ – число ядер в начальный момент времени t = 0, а N – число ядер, сохранившихся к моменту времени t.

Обычно радиоактивный распад характеризуют не постоянной распада λ , а <u>периодом полураспада</u> T – временем, за которое распадается половина ядер. Тогда из закона распада следует, что $N = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$ или $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,693}{T}$. Закон радиоактивного распада можно также записать в виде

$$N = N_0 e^{-t \ln 2/T} = N_0 \cdot 2^{-t/T}$$

На рисунке видно, что через каждый промежуток времени, равный периоду полураспада число сохранившихся ядер уменьшается в два раза.

Закон радиоактивного распада можно применять только для очень большого числа ядер $N \gg 1$, когда отношение dP = -dN/N является вероятностью распада за интервал времени dt. Одно нестабильное ядро характеризуют средним

временем жизни
$$\tau = \frac{\int t \, dN}{\int dN} = \int_0^\infty t d\left(e^{-\lambda t}\right) / \int_0^\infty d\left(e^{-\lambda t}\right) = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2}.$$

Число ядер, распавшихся за интервал времени $t_1 \le t \le t_2$, вычисляется

по формуле

$$N_{\text{pacm}} = N(t_1) - N(t_2) = N_0 \left(e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2} \right)$$

Полученные зависимости позволяют по измеренным в настоящий момент времени концентрациям радиоактивных изотопов определить их концентрацию в любой предшествующий момент времени. На этом основании основан <u>метод радиоизотопной хронологии</u>. Например, возраст всех органических останков в пределах ≤ 60 тыс. лет, определяется <u>радиоуглеродным методом</u>.

Под действием нейтронов космических лучей в атмосфере все время идет реакция пре-

вращения ${}^{14}_7N + n \rightarrow {}^{14}_6C + p$,

и имеется постоянная концентрация радионуклида ${}^{14}C$. В клетках живых организмов (животных, рас-

тений) происходит обмен с атмосферой, при кото-







 ${}^{14}_{6}C \xrightarrow{\beta^- - \text{распад}} {}^{14}_{7}N + e^- + \overline{v}_e$ и имеет период полураспада T = 5730 лет, его

содержание в функционирующем организме практически постоянно. В момент смерти t_c обмен клеток организма с атмосферой прекращается, и концентра-

ция изотопа ${}^{14}C$ уменьшается в соответствии с законом радиоактивного распада. Измерив концентрацию ${}^{14}C$ в органических останках можно точно определить возраст Δt этих останков.

Радиоуглеродный метод хорошо работает в пределах $\Delta t \le 60$ тыс. лет и используется в криминалистике, археологии и т.п. Чтобы определить возраст геологических пород, аналогичным образом определяют содержание в них радионуклидов 206 Pb, 40 Ar, 86 Sr со много большим периодом полураспада или содержание продуктов их распадов:.

11.5. Энергия выхода ядерной реакции распада. Дефект масс

Спонтанный естественный распад ядер с выделением энергии происходит за счет уменьшения суммарной энергии покоя участвующих в реакции частиц. Разность суммарных масс частиц (ядер) до реакции и после реакции называют <u>дефектом масс:</u>

$$\Delta m = \sum_{\text{до реакции}} m_{i \text{ нач}} - \sum_{\text{после реакции}} m'_{j \text{ кон}}$$
.

$$\vec{v}_{2}'$$

m² ядро m⁴ \vec{v}_{1}'
осколки
 \vec{v}_{3}' m⁴ \vec{v}_{4}'

Видно, что в результате такой реакции суммарная масса частиц после распада будет меньше суммарной массы частиц до распада на величину Δm . Разность энергий покоя начальных и конечных частиц (ядер) называют энергетиче-

ским выходом реакции

$$Q_1 = \Delta mc^2 = \left(\sum_i m_{i \text{ Hay}} - \sum_j m'_{j \text{ KOH}}\right)c^2.$$

Эта энергия выделяется в виде дополнительной кинетической энергии ядер-осколков или энергии фотонов электромагнитного излучения (ү-квантов), излученных в процессе ядерной реакции. Вспоминая, что кинетическая энергия хаотического движения частиц является тепловой энергией, можно вычислить тепло, выделяемое в реакциях распада ядер, как произведение энергетического выхода (энергия распада одного ядра) на число распавшихся за время Δt ядер:

$$Q = Q_1 \cdot N_{\text{pacm}} = Q_1 \cdot N_0 \left(1 - e^{-\lambda \Delta t} \right)$$

талетающая частица оскопки

Ядерная реакция может происходить и с поглощением энергии: $Q_1 < 0$. Для этого первоначальное ядро с массой m_я должно поглотить какую-либо частицу с массой *m*, имеющую достаточно большую кинетическую энергию. В этом случае суммарная масса частиц в процессе реакции возрастает: $m + m_{g} < \sum m'_{i}$.

Из законов сохранения релятивистских энергии – импульса можно найти минимальную кинетическую энергию налетающей частицы, необходимую для протека-

ния такой реакции,. Она называется энергетическим порогом реакции и равна |

$$m_{\rm nop} = \frac{\left(\sum m_i'\right)^2 - \left(m_{\rm g} + m\right)^2}{2m_{\rm g}}c^2$$

МэВ

Энергетический выход ядерной реакции распада также можно записать в виде разности энергий связи конечных и начальных ядер: $Q_1 = \sum_j E'_{\text{св } j \text{ кон}} - \sum_i E_{\text{св } i \text{ нач}} = \sum_j A'_j \varepsilon'_{\text{св } j \text{ кон}} - \sum_i A_i \varepsilon_{\text{св } i \text{ нач}},$ где A_i и A_j '- число нуклонов в начальных и конечных ядрах (конечные ядра более устойчивы и обладают большей

удельной энергией связи ε_{cB}).

11.6. Возможность термоядерного синтеза. Проблема нуклеосинтеза

График зависимости ε_{cB} показывает, что легкие ядра с числом нуклонов $A < 30 \div 40$ имеют не очень большую энергию связи, и для них энергетически выгодно соединение в более устойчивые ядра с $A = 40 \div 70$. Такая реакция, происходящая с выделением тепловой энергии, называется термоядерным синтезом.

Осуществить реакцию термоядерного синтеза не так просто. Для слияния центры ядер должны сблизиться на расстояние $2r_{\rm g}$, где $r_{\rm g}$ – радиус ядра. Но при этом положительно заряженным ядрам надо преодолеть кулоновские силы отталкивания, кулоновский потенциальный барьер. Это возможно, если ядра движутся навстречу друг другу с кинетической энергией, превышающей кулоновскую потенциальную энергию отталкивания. Такие ядра имеются в газе, нагретом до температуры Т, при которой сред-

няя кинетическая энергия
$$2\langle E_{\rm K} \rangle = 2 \cdot \frac{3}{2} k_{\rm B} T \ge \frac{k (Ze)^2}{2r_{\rm g}}$$
 или $T \ge \frac{k (Ze)^2}{6k_{\rm B} r_{\rm g}}$

 $(k_{\rm E} - {\rm постоянная} \ {\rm Больцмана}, \ k = 1/4\pi\epsilon_0$). Это – огромная температура. Для слияния двух ядер водорода с $r_{\rm g} \sim 10^{-15}$ м газ из таких ядер (протонов) надо нагреть до температуры $T \ge ke^2/6k_{\rm E}r_{\rm g} \approx 3.10^9$ К, недостижимой пока в лабораторных условиях.

К счастью, ядра могут преодолеть кулоновский потенциальный барьер за счет туннельного эффекта. Это снижает температуру, при которой возможны реакции термоядерного синтеза до $T_{\rm tc} \approx 10^7 \div 10^8$ К (температура ядерного взрыва). Ни один материал не способен выдержать такую температуру. Поэтому нагретый газ из сталкивающихся легких ядер необ-

ходимо удерживать в вакууме в виде плазмы с помощью очень сильных неоднородных магнитных полей. В таких полях заряженное ядро движется по спиралевидной траектории вокруг линии магнитной ин-

> дукции \vec{B} , но не способно оказаться в области сильного магнитного поля с $B \ge B_0 \sim 5 \div 10$ Тл. Ядра будут отражаться от <u>магнитных стенок</u> (областей со значением $B \ge B_0$) и находятся в области с $B < B_0 - \underline{B}$ магнитной ловушке.

> Это – принцип удержания плазмы из легких ядер, разогретой до температуры термоядерного синтеза, в управляемых термоядерных реакторах (ТОКАМАКах), которые считаются наиболее перспективным и дешевым источником энергии в будущем. В







1 кг воды H_2O должно содержаться ~ 5·10²¹ атомов дейтерия ${}_1^2H$. А так как при реакции синтеза ${}_1^2H + {}_1^2H \rightarrow {}_2^4He + \gamma$ выделяется $Q_1 = 2,4$ МэВ энергии, то каждый килограмм воды в океане является потенциальным источником

 $5 \cdot 10^{21} \cdot Q_1 / 2 \sim 10^{10}$ джоулей энергии, которую можно получить только за счет дейтерия, имеющегося в воде. В отличие от реакций деления тяжелых ядер, в термоядерных реакциях практически не возникает радионуклидов с большим периодом полураспада (продуктов деления), и нет проблемы их утилизации (хранения).

Пока работающий термоядерный реактор не построен, так как одновременно надо обеспечить выполнение трех условий:

- 1) создать большую температуру $T > T_{\rm rc} \sim 10^7 \div 10^8$ К;
- 2) создать очень сильное удерживающее магнитное поле $B \ge 5$ Тл в большом объеме;
- 3) поместить в это поле плазму из легких ядер с большой концентрацией $n > 10^{20} \text{ м}^{-3}$, чтобы нашлось достаточно ядер, испытывающих встречные столкновения (энергии, выделяющейся при слиянии таких ядер, должно быть достаточно для разогрева плазмы до температур $T > T_{\text{тс}}$).

В настоящее время удалось осуществить реакцию неуправляемого термоядерного синтеза в термоядерных бомбах: мощная взрывчатка сжимает урановую оболочку, создавая критическую массу. Начинающийся ядерный взрыв разогревает литий-дейтериевую сердцевину бомбы до температуры термоядерного синтеза и препятствует разлету образующейся плазмы. Выделение энергии в результате термоядерного синтеза в 5÷10 раз выше, чем при реакциях цепного деления (в расчете на 1 кг вещества). Поэтому термоядерные бомбы намного мощнее урановых или плутониевых. Самая мощная взорванная термоядерная бомба была эквивалентна взрыву 56 млн. тонн тротила.



Условия возникновения термоядерного синтеза выполняются в недрах звезд. Источник энергии солнечного излучения и горения всех звезд – термоядерные реакции. Каждая звезда, по сути, является взрывающейся термоядерной бомбой, в которой плазма из ядер удерживается от разлета огромными силами гравитационного притяжения.

Заметим, что термоядерный синтез позволяет объяснить проблему <u>нуклеосинтеза</u> – образования всех тяжелых элементов таблицы Менделеева во Вселенной, вещество которой первоначально состояло из ~78% водорода и ~22% гелия. В процессе горения звезд в результате термоядерного синтеза не могут образоваться ядра с зарядовым числом, большим Z = 14 (кремний). Все более тяжелые элементы, включая трансурановые, возникают в течение тех нескольких секунд, за которые происходит взрыв гибнущей звезды. За счет быстрого гравитационного сжатия потенциальные барьеры между ядрами "сминаются", деформируются, начинаются процессы электронного захвата и резко возрастает число вылетающих нейтронов. Ядра захватывают нейтрон и, не успевая испытать реакции деления или α -распада, захватывают следующий нейтрон или протон и т.п.

Этот ступенчатый процесс приводит к синтезу всех элементов таблицы Менделеева, из которых состоит Земля. Практически всё ее вещество, включая атомы, из которых мы состоим, образовалось в существовавших ранее массивных звездах, разлетелось при их взрыве и снова собралось в планету.

11.7. Защита от ионизирующих излучений

Реакции всех ядерных превращений сопровождаются вылетом частиц <u>ионизирующих излучений</u>. Это – нейтроны, протоны, ядра дейтерия, гелия (α-частицы), электроны и позитроны (β-частицы), фотоны рентгеновского и γизлучения. Выбивая электроны из атомов среды (ионизация), они изменяют энергию связи соседних атомов и способны разрушить межатомные связи. При этом энергия ионизирующих излучений поглощается средой.

Воздействие излучения на среду характеризуют <u>дозой излучения</u> D – энергией, поглощенной в 1 кг вещества. Дозу излучения измеряют в грэях: 1 Гр = 1 Дж/кг. Можно также описать такое воздействие с помощью суммарного электрического заряда ионов, возникающих в 1 кг вещества. Этот заряд называется <u>экспозиционной дозой</u> и измеряется в рентгенах: 1 P = $2,58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг (что эквивалентно образованию $2,08 \cdot 10^{15}$ пар ионов и электронов в 1 м³ воздуха при нормальных условиях). Экспозиционная доза в 1 Р соответствует дозе излучения $8,8 \cdot 10^{-3}$ Гр.

В первую очередь ионизирующие излучения повреждают длинные цепочки молекул в полимерных или биологических структурах. Доза γ -излучения, приводящая к заметному изменению физических свойств среды, равна 10⁵ Гр для каучука, 10⁵ \div 10⁶ Гр для полиэтилена, 5 \cdot 10⁷ Гр для стекла. В каждой клетке живого организма доза излучения в 0,01 Гр (или 1 Р) приводит к ионизации сотен тысяч ее атомов, что нарушает работу клетки и убивает ее.

Действие разных ионизирующих излучений на живой организм не одинаково. Распады ядер в гранитах, например, создают дозу излучения, в несколько раз превышающую естественный радиоактивный фон. В этом нетрудно убедиться, поднося дозиметр к гранитной облицовке зданий. Однако это излучение, ионизирующее воздух, практически безвредно для человеческого организма. С другой стороны, быстрые реакторные нейтроны оказывают в 10 раз большее воздействие на биологические ткани, чем рентгеновское излучение, создающее ту же самую дозу D. Поэтому в качестве эталона воздействия на **биологические** объекты рассматривают рентгеновское излучение с энергией фотона 250 кэB, и вводят <u>эквивалентную дозу</u> облучения

$$H = kD,$$

которая измеряется в зивертах: 1 Зв = 1 Дж/кг. Безразмерный коэффициент k различен для разных видов излучения, зависит от их энергии и показывает, во сколько раз данное излучение вреднее для человеческого организма, чем эталонное рентгеновское излучение с той же самой дозой D. Для потоков тяжелых α -частиц, например, коэффициент $k \approx 20$.

Небольшую дозу облучения человек получает непрерывно за счет <u>естественного радиоактивного фона</u>. В горах эта доза выше, чем на равнине, а ее среднее значение на поверхности Земли $H_{ecr} \approx 2 \text{ мЗв/год}$. Это облучение обусловле-

но космическими лучами, падающими на поверхность Земли (~410 мкЗв/год), распадом изотопа $^{40}_{19}K$ в тканях живого существа (~150 мкЗв/год), и, в основном, распадом радона и тория. К счастью, радон, испускаемый из земных недр, содержащийся в воде и выделяющийся из нее при кипячении и испарении, не накапливается в организме, а служит только внешним источником α -излучения (не забывайте проветривать квартиру для его удаления).

Использование ионизирующих излучений в медицинских аппаратах (рентгеновские аппараты и т.п.) дает вклад в дозу облучения в среднем ~ 0, 2 ÷ 0, 3 мЗв/год. Следует помнить, что атмосфера Земли задерживает значительную часть рентгеновского излучения Солнца и приходящих от него космических лучей. Однако, совершая авиаперелет на большой высоте ~10 км, человек получает дозу облучения, сравнимую с той, которую он получит в рентгеновской установке. Вклад в дозу облучения всех действующих на Земле реакторов и АЭС порядка 0,001·Н_{ест} (2 мкЗв/год), что намного меньше дозы облучения, вызванной сгоранием химического топлива (если только реактор не взрывается).

При работе с источниками радиации допустима доза $H \lesssim 0,05$ Зв/год, так что за свою жизнь человек без вреда может получить дозу в 4 – 5 Зв. Но получив такую дозу облучения в течение короткого времени, человек умирает от лучевой болезни. В первую очередь поражается костный мозг, прекращающий производить красные кровяные тельца, и слизистая оболочка кишечника (невозможность пищеварения). Но некоторые органы, которые облучают для ликвидации, например, раковых клеток, "выдерживают" дозу в 10÷20Зв.

Живые организмы по разному реагируют на полученную дозу облучения. На рисунке справа показаны дозы, приводящие к 50% вероятности гибели живого существа. Такие дозы могут быть созданы, в первую очередь, искусственно созданными источниками излучения. При этом

среды, ослабляющего ионизирующее излучение в е раз.

энергия ионизирующего излучения и его способность производить ионизирующий эффект уменьшается с пройденным в среде расстоянием *x* приблизительно по экспоненциальному закону (закон Ламберта): $E = E_0 e^{-x/\lambda}$, где $\lambda -$ радиационная единица длины – толщина слоя



Наиболее хорошо взаимодействуют с атомами среды и теряют свою энергию тяжелые 0[⊥] α-частицы. Поэтому достаточно слоя воздуха толщиной 2λ ~ 10 см или даже листа бумаги, чтобы практически полностью задержать α-излучение от внешних источников, используемых в технических устройствах.

β- и γ-излучения теряют энергию хуже. В качестве защиты наиболее хорошо поглощает β- и γ-излучения свинец. Однако наибольшую опасность представляют не внешние источники ионизирующих излучений, от которых можно защититься слоем задерживающего материала, а радионуклиды, накапливающиеся в самом организме в процессе облучения, дыхания или поступившие с пищей. К числу наиболее опасных нуклидов относятся изотопы йода ¹³¹/₅₃ *I* (источник β- и γ-излучения, скапливается в щитовидной железе, легких), стронция ⁹⁰/₃₈ *Sr* (источник β-излучения, накапливается в костях, легких), цезия ¹³⁷/₅₅ *Cs* (источник β-излучения, накапливается во всех тканях тела, в печени). Периоды полураспада этих нуклидов достаточно велики: *T_{Sr}* = 28,5 лет, *T_{Cs}* = 30,2 лет, и все это время они будут облучать костный мозг. Даже изотоп йода ¹³¹ *I* с *T_I* = 8,02 суток за несколько недель существования в щитовидной железе успевает нанести огромный вред расположенным поблизости областям мозговой ткани.

Подобные радионуклиды образуются в процессе расщепления ядерного горючего (U, Pu). Поэтому крайне важна проблема надежного хранения радиоактивных отходов, выгружаемых из реакторов после выгорания урана. В случае заражения организма перечисленными нуклидами необходимо их вывести, срочно принимая, например, препараты, содержащие стабильный изотоп йода ¹²⁷ I, вытесняющий радиоактивный йод ¹³¹ I из щитовидной железы, или кальций, замещающий стронций ⁹⁰ Sr в костной ткани.

Для радиометрических исследований продуктов питания, живых организмов и т.п. используют изотопы с периодом полураспада достаточно большим, чтобы успеть произвести измерения, но успевающим распасться за несколько минут и не приносящим дальнейший вред. К таким нуклидам относятся, например ${}^{16}_{7}N$ (T = 7,13 с) или ${}^{19}_{8}O$ (T = 27,1 с).